

回归原理

刘正荣

ZJL@CS.Stanford.EDU

此内容由人工智能(AI)辅助翻译, 若未达意, 请查阅[原文](#)

摘要

热力学第二定律常常被视为普适性原理, 但其适用范围存在局限。在以排斥力为主导的系统中, 熵随着组成成分的扩散而增加; 然而在引力支配的领域中, 熵却可能减少。这一现象在星际尘埃凝聚成恒星和星系的过程中表现得尤为明显。这也解释了为何宇宙并未陷入“热寂”, 而是逐渐演化出更有序的结构。此外, 第二定律仅刻画了单向演进, 而许多自然过程却呈现周期性振荡, 说明其仅反映了部分自然过程。为弥补这些不足, 我们提出**回归原理**, 它统一了熵增、熵减以及振荡过程。由于质能等价, 宇宙中的一切存在皆表现为能量形式, 物质只是能量的一种集中体现。任何过程都涉及能量形态的转化与再分配。每个系统都会在给定能量水平下演化至一种特征性的平衡状态, 即其**平衡能量分布**。系统的总能量决定能量的形态与分布, 而这种分布又决定了维持或恢复平衡的主导作用力。扰动会引起自发性的回归过程, 常表现为周期性振荡; 而外部能量的输入则可能改变这种平衡, 推动系统向新的平衡态演进。因此, **回归原理**揭示了宇宙演化的本质机制, 为各种系统行为提供了统一的理论框架, 比热力学第二定律更具普适性。

前言

什么主宰着宇宙的运作? 一个常被用来回答这一问题的原理是热力学第二定律, 它主张孤立系统的熵永不减少。然而, 将其视为真正普适的定律却面临诸多挑战。首先, 第二定律描述的是系统的定向、不可逆演化, 但许多自然系统却表现出可逆的行为, 如振荡或周期性过程。其次, 在排斥力主导的作用下, 熵通常会增加^[1-8], 然而在许多由引力支配的过程中, 熵实际上可能会减少^[9]。

要理解熵减少的现象, 有必要回顾熵的定义。在经典热力学中, 系统熵的变化定义为可逆过程中从环境传递给系统的微小热量与系统在该热量传递时的瞬时温度之比:

$$(1) \quad dS = \frac{dQ}{T}$$

其中, T 是系统的绝对温度, S 表示熵, dQ 表示传递的热量, 而 dS 则表示该热量传递引起的熵的变化。随后, 路德维希·玻尔兹曼通过分析系统成分的微观行为, 提出了熵的统计学定义。该定义有几种等价形式, 其中之一为:

$$(2) \quad S = k_B \ln(N)$$

在此定义中, k_B 是玻尔兹曼常数, N 表示系统所有可能微观状态数目。尽管人们通常认为热力学与统计学熵定义的等价性, 但二者在本质上仍然不同。这一差异在接近绝对零度时尤为明显。在绝对零度下, 系统仅占据唯一的微观状态($N=1$), 即基态, 根据定义2, 其熵为零。相比之下, 热力学定义预测了不同的结果: 当温度趋近于零时, 温度的倒数发散至无穷, 使得定义1下的熵也趋向无穷。这一矛盾凸显了统计学与热力学熵表述之间的根本不一致。

为了说明熵在排斥力作用下通常会增加，考虑两个温度分别为 T_1 和 T_2 的系统，其中 $T_1 > T_2$ 。当这两个系统相互作用时，热量 dQ 从高温系统流向低温系统。根据热力学定义 (1)，两个系统的总熵变化为：

$$(3) \quad dS = \frac{dQ}{T_2} - \frac{dQ}{T_1} = \frac{dQ}{T_1 T_2} (T_1 - T_2) > 0$$

这表明，在此类相互作用过程中，复合系统的总熵会增加。一个简单的例子是室温下一杯水中的冰块融化。如果将水视为系统 T_1 ，将冰视为系统 T_2 ，那么冰会在水中融化，如表达式 (3) 所示，复合系统的熵随之增加。在这种情形下，逆过程，即液态水自发重新凝聚成冰，是不可能的。

上述熵增推理，是增加建立在一个直观假设之上的：热量总是沿着温度梯度向低温方向传递。这个假设通常在由排斥相互作用主导的体系中成立——例如，在气体中，价电子之间的静电排斥支配分子行为。在这种情况下，粒子倾向于扩散，从而促进混合以及沿温度梯度的自发热传递。热量自然沿温度梯度流动的观念长期以来被视为自然界的内在属性，并隐含在各种相互作用体系的模型之中。在这一前提下，表达式3可自然成立，人们也往往想当然地认为熵不可能减少。然而，在由吸引力主导的体系中，这一假设则不再成立。

然而，在由吸引力主导的系统中，该假设并不适用。要推翻“熵永不减少”的普适性，只需找到一个热量从低温系统流向高温系统的案例，从而使表达式 (3) 的右端为负值。其中一个典型例子是过冷水。过冷水指温度低于冰点但尚未凝固的液态水。当受到扰动时，水会迅速结冰，这种现象甚至可在孤立体系中发生。水在结冰过程中释放热量，即分子键形成所释放的势能。这部分热量被容器吸收，使容器升温。在此情形下，热量自较冷的水流向较暖的容器，使表达式 (3) 的右端为负，从而导致复合系统的熵减少。

此外，由于分子的自由度受到分子键的限制，可及微观状态数减少，依据统计定义 (2)，系统熵也随之降低。分子键的形成表明，分子间的静电吸引力在此过程中占据主导地位。与冰融于水的情形相比，关键差异在于，在这一低能量环境中，吸引力主导了过程，致使热流逆温度梯度而行。

同样的原理被应用于一种商业产品——暖手袋。暖手袋由一个密封的塑料袋构成，内含醋酸钠的过饱和水溶液及一块不锈钢片。当弯折钢片时，类似于扰动过冷水，会触发醋酸钠的结晶。键能的快速释放使暖手袋迅速升温。醋酸钠(CH_3COONa)是乙酸的钠盐，其三水合物晶体在约摄氏58–58.4度熔化。当暖手袋置于热水中时，这些晶体会正常熔化；在缓慢冷却过程中，溶液可在室温下保持过饱和状态而不结晶。与过冷水的例子相似，此过程中的熵减与逆梯度热流，同样由分子间的吸引力所支配。

类似的熵减与逆梯度能量流，在引力主导的天体演化过程中也十分常见。以地球为例：若将地球视为系统 T_1 ，将宇宙其他部分视为系统 T_2 ，那么沿时间反推，可以看到一个较热的地球逐渐弥散为寒冷的宇宙尘埃。这一熵增过程类似于冰融于水的情形。然而，当把地球与宇宙作为一个整体体系并按照时间顺序来考察时，它们的演化却表现为总熵的净减少。这说明能量流并非总是沿温度递减的梯度传递，它亦可能逆向发生。无论按照统计学还是热力学定义，在宇宙尺度上，宇宙的演化，从恒星的形成到星系的聚集，似乎指向更结构化、低熵态，而非“热寂”假说所预测的粒子与能量均匀分布的高熵态。

由此可见，熵的增减取决于系统中占主导地位的相互作用力。此外，宇宙中系统的演化并不总是遵循热力学第二定律所暗示的单向轨迹，它也可能表现出周期性振荡。更为关键的是，第二定律未能揭示宇宙动力学的根本特性，即能量的持续转化与再分配，而这一本质在**回归原理(Restoration Principle)**中得到了更准确的体现。

回归原理

根据爱因斯坦的**质能等价原理**，宇宙中的一切都以某种形式的能量存在，物质本身则是能量的集中体现。任何系统的演化，本质上都由其能量的转化所驱动。这种转化要么趋向于恢复平衡的能量分布，要么在平衡态附近进行振荡。**回归原理**认为，自然界固有地倾向于使系统向这种能量平衡演化，其特征是在给定总能量水平下，不同形式能量之间呈现出特定的比例关系。这种平衡通过持续的能量转化逐步形成，使系统趋于稳态。它反映了系统内部多种竞争驱动的相互作用，其中占主导地位的力引导能量重新分配，以在保持总能量守恒的前提下最小化势能。其核心思想归纳于以下方程与表达式中：

$$(4) \quad E = M + D$$

$$(5) \quad D = U + K + R$$

$$(6) \quad U:K:R > u:k:r$$

这些关系定义了系统在给定总能量下的平衡能量分布。根据爱因斯坦的质能等价原理，系统的总能量(E)等于其等效质量(m)与光速平方(c^2)的乘积。等效质量不仅包括系统的静止质量，还包含其他所有形式能量的贡献。在方程(4)中，这一总能量更为明确地表示为两个部分的和：动态能(D)和物质能(M)。其中，M表示系统在绝对零度下由静止质量所对应的能量，而D则代表系统的动态能量部分。温度通常通过**辐射水平**来表示，其反映的是系统的动态能量，而非仅仅是粒子运动的动能(K)，这也是许多教材中常见的误解^[10]。绝对零度对应于动态能(D)消失的状态。由于势能、动能和辐射能不断相互转化，要达到绝对零度，三种能量必须同时达到各自的最小值^[11]。

虽然物质能通常不会直接反映在温度测量中，但一旦释放出来，它就可能表现为热。以核子之间的势能为例，它通常被束缚在物质内部，被视为质量的一部分。在核聚变过程中，这部分能量会被释放，同时伴随着相应的质量损失，并以辐射能的形式向外散发，从而产生如太阳这类恒星所观测到的极高温。在正电子-电子湮灭中，两种粒子的全部质量都会转化为辐射能。同样，任何基本粒子都可以与其反粒子发生湮灭，释放出其全部物质能量。相反，在成对产生过程中，高能光子在原子核附近作用时，可以生成一个电子-正电子对，从而展示了物质如何直接由辐射能产生。

尽管物质能与动态能可以相互转化，但它们在系统中的形态与分布主要由系统的总能量所决定。正如水会因动态能(通常表现为温度)的不同而呈现固态、液态或气态一样，天体系统中的物质也会根据总能量演化为不同的状态。当天体的质量超过约0.08个太阳质量时，引力坍缩足以克服库仑斥力，使不同原子的核子足够接近，使短程核力发挥作用并触发氢聚变，标志着恒星的诞生。通过核聚变，轻元素逐步结合形成较重元素，这一过程可以持续进行直到形成铁。铁之后，原子核变得不稳定：质子间的库仑斥力超过短程核力的吸引，使重元素发生裂变或放射性衰变为较小的原子核。因此，铁代表了最稳定的原子核，并在恒星的多代演化过程中不断积累。

当一颗初始质量为8-25个太阳质量的恒星，其铁核质量超过钱德拉塞卡极限^[12-13](约1.4个太阳质量)时，电子简并压力已无法抵抗引力，核心随即坍缩。在此过程中，电子与质子结合形成中子，从而产生一颗**中子星**，其物质主要以中子形态存在。初始质量超过25个太阳质量的恒星，其铁核可能突破托尔曼-奥本海默-沃尔科夫(TOV)极限^[14-16](约2.2个太阳质量)。在这种情况下，中子简并压力以及强短程核排斥力都不足以阻止进一步的引力坍缩，最终形成**黑洞**。在黑洞内部，物质被认为压缩至一个奇点，即近乎无限密度的点。其引力之强大以至于连光也无法逃逸，因此无法被直接观测。黑洞的存在通常通过附近恒星的运动，以及吸积物质辐射出的能量间接推断。这些转变表明，宇宙在特定能量条件下演化为特征性物质形态和能量分布的趋势。

质量不足以突破钱德拉塞卡极限的恒星最终会演化为白矮星或红矮星。质量低于约0.08个太阳质量的天体则完全无法启动核聚变，因此保持为类行星天体，例如地球。在这类体系中，引力不再是决定物质形态的主要因素。取而代之的是库仑相互作用。

用，它在微观尺度上占主导地位，支配着物质的结构与行为。由于静电力既可以表现为吸引，也可以表现为排斥，再加上元素之间能够以无数方式结合，因而产生了极其丰富的物质多样性。根据其动态能水平，物质可以以固态、液态或气态存在，并在不同化合物之间发生无数化学反应。在这一系列能量状态之中，特别是在地球独特的条件下，生命能够由物质多样性中诞生，而智慧则可以从生命系统中进化而来。

在引力主导的大型系统中，在这些系统中物质能与动态能的相互转化十分常见，不同的是，在受库仑力支配的系统，其演化主要体现在动态能(D)内部势能(U)、动能(K)与辐射能(R)之间的转化与交换，如方程(5)所示。这些交换不断调整三种能量形式的相对比例，趋向于由平衡比率(u:k:r)表征的稳定能量分配，如表达式(6)所示。对于一个特定动态能水平的孤立系统，该比率在基本保持恒定。在特定物态(固态、液态或气态)中，该比率通常处于一个较窄的范围内。偏离该平衡会引发三种能量形式之间的内部交换，以恢复平衡，这一过程往往表现为围绕平衡点的周期性振荡。相比之下，长期的渐进演化通常反映的是从一个平衡态向另一个平衡态的过渡，而这种过渡通常由系统整体动态能的变化所触发。在所有情况下，系统都朝向其能量形式之间的平衡分布演化。

需要强调的是，温度反映的是系统的**辐射能**，而不是动能。辐射能的水平和相对比例由系统的总动态能决定，而总动态能又决定了支配物质状态(固态、液态或气态)的主导作用力。在低动态能水平下，分子之间的库仑吸引占主导地位，形成化学键并增加系统中势能的比重。为了在低温下维持较高的势能，水会结晶为固态。类似地，化学反应的方向也受系统动态能的支配：在对热敏感的反应中，输入辐射能可以通过改变能量成分的平衡而改变反应方向。同样，改变反应物或生成物的数量也会影响势能的贡献，从而改变整体能量平衡。总之，一个系统的总动态能不仅决定了能量成分的平衡比率，也决定了物质的状态。

熵增或熵减反映了系统在不同能量水平下恢复能量平衡分布的趋势。在低能量水平下，吸引力占据主导地位，促使粒子间形成更多键并储存更多势能。在这种情况下，平衡分布通常以高比例的势能为特征。在吸引力的影响下，粒子倾向于聚集，从而减少微观态数量，导致熵减。这一机制解释了低温下晶体和固态物质的自发形成，也说明了为何天体系统在引力作用下会从宇宙尘埃演化为恒星和星系，导致熵降低，而非走向“热寂”。

在高动态能水平下，粒子间的相互作用以库仑排斥为主，导致键的断裂并使体系趋于弥散。这解释了为何物质在高温下会发生熔化或汽化过程，并伴随熵的增加。随着键的断裂，势能成分减少，使动态能中势能的占比下降，而其他能量形式的占比相对上升。从**回归原理**的角度来看，这种熵的增加体现了体系在高能条件下为恢复平衡能量分布所做的响应。

这一原理同样有助于解释为什么许多物体会随着时间的推移而发生降解——这一过程通常被描述为熵的增加。这类材料往往形成于不同的能量条件下，而其最终的分解反映了体系在新的能量水平上恢复能量平衡发布的自然趋势。例如，聚乳酸(PLA)是一种由玉米淀粉制成的生物塑料，它在约摄氏170–200度的高温下合成。在室温环境下，能量水平发生转变；为了在这一较低水平上恢复平衡，PLA会发生酯键的水解，从而导致快速降解。然而，并非所有自然过程都遵循降解路径。结晶过程就是一个相反的趋势：体系变得更加有序和稳定，这正是**回归原理**的另一种体现。

能量平衡分布简介

回归原理的核心概念之一是在给定总能量下**能量的均衡分布**，即系统中各种能量形式之间保持的一种稳定比例。在任何系统中，能量都会不断地从一种形式转化为另一种形式，包括以物质形式存在的能量，而各类能量的占比通常会围绕某个特征平衡点波动。在这一平衡点上，这些比例之间的比率对系统而言保持恒定。当分布偏离这一平衡比率时，系统会倾向于恢复它——偏离越大，恢复驱动力越强。因此，系统的演化要么收敛于这一平衡，要么围绕其振荡，但总体轨迹始终指向恢复这一平衡。

势能由于与作用力本质相关，在其影响下总是趋向于最小化。由于系统的总能量守恒，某一形式的能量减少必然要由另一种形式的增加来补偿，从而使系统偏离其平衡分布。当某一种能量形式偏离其平衡占比时，系统会通过其他能量形式之间的转化与补偿来恢复平衡。结果是，每一种能量形式通常都会围绕其特征比例发生振荡。这种平衡分布犹如引力一般，持续将各种能量形式拉回其平衡水平。

为了说明这一概念，可以考虑单摆这一由重力主导的简单系统。随着单摆的势能增加，其动能相应减少，从而保持总能量不变。每种能量都围绕着一个特征性的平衡值振荡——即系统总能量的一个固定比例。这些平衡值之间的比率始终保持不变。

作为一个更复杂的例子，考虑一颗在圆轨道上运行的行星，此时它的势能和动能都保持恒定。两者之间的比值因此固定，代表了轨道运动的稳态。然而，这种平衡比并非统一——它在不同的行星系统中有所差异。当势能以轨道中心为参考时，随着轨道半径的增加，该比值也随之增大。再者，尽管在这一简化模型中，各种形式的能量看似恒定，但实际上它们从未真正如此；由于大多数行星轨道并非完美的圆形，动能和势能通常都会围绕各自的平衡值发生波动。

设想这颗行星从后方受到一颗较小天体的撞击，从而获得额外能量。这种扰动可能会使行星在其平均轨道附近振荡，这种现象称为**本轮运动**。在这种状态下，势能和动能都会围绕各自的平均值波动。如果撞击足够强烈，轨道可能会变为椭圆形。事实上，大多数行星轨道本身就是椭圆的，而非完美圆形。在这种情况下，行星的势能和动能会周期性地围绕各自的平均值变化。随着动能增加，势能按比例减少，从而保证总机械能保持不变。若只关注某一能量分量，例如势能，就可以看到它随时间在其平衡值附近振荡。这个例子还表明，外部撞击会改变系统的**能量平衡比**。

以上是一些由引力支配、在稳定状态下维持能量平衡分布的机械系统实例。类似的平衡形式同样可以在化学反应中观察到。**化学平衡**是指在可逆反应中，正反应与逆反应的速率相等，从而使反应物与生成物的浓度在时间上保持恒定。乍一看，化学反应中的振荡行为似乎与机械系统有本质区别。但实际上，反应物与生成物之间的转化同样涉及能量的再分配，特别是储存在不同化学键中的势能——毕竟，物质本身就是能量的一种形式。化学反应中的能量转化主要受库仑力的支配，而这将是接下来几节的重点。

辐射能的动态演化

作为动态能量的一个组成部分，由引力产生的辐射能在之前被忽略，因为其影响微乎其微。然而，在**库仑力**作用下，其作用变得显著，不能再被忽视。事实上，它在动态能量的各种形式之间的转化与再分配中起着至关重要的作用——这些过程正是**恢复原理**的核心所在。

当物体加速时，其相关的力场发生变化，从而以波的形式释放能量^[17]。不同的基本作用力（引力、电磁力、强核力）产生不同类型的辐射，所发射辐射的能量大小反映了力的强度：力越强，辐射能量越高；力越弱，辐射能量越低。例如，当带电粒子加速时（如电子轨道跃迁），便会释放电磁波，如光。

需要明确的是，自然界中并不存在独立的“纯磁波”。磁场本质上是由变化的电场所诱导而成的数学结构。磁场的最小量子来自电子的自旋，自旋本身同时具有南北两个极性，因此至今从未观测到磁单极子的存在，说明磁场无法独立存在。然而，在麦克斯韦方程组所构建的数学框架中，磁场仍是描述电磁现象不可或缺的重要组成部分^[18]。实际上传播于真空中的，是变化的电场。

任何带电粒子在电场中都会受到力的作用，并吸收被动电场携带的能量。吸收能量后，电子可以被激发到更高的轨道，从而储存能量。势能也储存在带电粒子之间的化学键中；当这些键被拉伸时，它们会积累更多的能量^[10]。这一机制解释了为什么材料在高温下往往会膨胀：化学键需要拉伸以在粒子之间储存额外能量^[19]。弹簧在拉伸时储存势能的能力是这一原理在宏观上的体现。事实上，化学键作为能量储存的库，其容量远大于轨道电子。相反，当化学键收缩时，储存的势能会以辐射的形式释放出来，这类似于电子跃迁到较低轨道时的能量释放。

系统的辐射能强度与其势能成分呈正相关，而势能的大小取决于作用的基本力的强弱。在三种基本力中，引力最弱，因此引力波携带的能量最少，极难探测，在之前的讨论中可忽略不计。相比之下，伽马射线——主要由强核力支配的过程产生——具有最高的能量。由库仑力作用下带电粒子相互作用产生的电磁波介于两者之间。然而，由于不同化学键的电力强度差异极大，电磁波的能量范围也非常广，从几千赫兹到超过 10^{23} 赫兹。

由于带电粒子同时具有质量，其加速度会在电场和引力场中产生波动，而且两者的频率一致。因此，每一个电场波都伴随着一个相同频率的引力波。考虑到宇宙中存在大量中性或不带电的物体，引力波的数量极有可能远超电波。然而，由于其能量极低，目前仍难以直接探测，故多数情况下无法察觉其存在。

人类首次间接观测引力波是在1974年，通过赫尔斯-泰勒双星脉冲星的发现，其轨道周期的衰减率与广义相对论中引力辐射造成能量损耗的预测高度一致。直到2015年9月，LIGO实验首次直接探测到由两个黑洞合并产生的引力波信号，标志着引力波观测时代的开启^[20]。即便像地-月系统围绕其共同质心旋转时，也会辐射极微弱的引力波，但能量过低，当前技术尚难以检测。

综上所述，系统中的势能与辐射能之间持续发生的转换，是其能量演化的基本过程之一。下一节将进一步探讨动能与其他能量形式之间的交换机制。势能、动能与辐射能三者之间的全面转化，在微观层面尤为关键，因为粒子间的这种能量交换非常常见并主导了系统的动态行为。

动能的来源与转化过程

系统的发展与演化由其能量的转化驱动，尤其是方程(5)中定义的三种动态能量之间的转化。在上一节中，我们探讨了辐射能与势能之间的能量交换机制。本节将关注其他关键机制——即支配能量与**动能**之间相互转化的机制。

在宏观尺度上，当物体从高势能位置运动至低势能位置时，势能的损失通常转化为动能，反之亦然。然而，在微观层面，如粒子振动等动能的来源，提出了更深层的物理问题。这类动能源于一种被称为**跃迁冲击**(transimpact)的机制，它是原子电子跃迁所引发的次级动态效应^[21]。

原子或分子间的库仑吸引通常在近距离发生作用；但当距离过近时，电子-电子间的排斥力会迅速增强。两者之间的平衡点对应一个特征性间距，即范德华距离。然而，在电子吸收能量并跃迁至更高轨道时(这一过程通常在数纳秒甚至更短的时间内完成)^[22-23]，其电子云迅速膨胀，导致原子体积增大，与邻近原子的距离骤减。这一突变打破了原有的排斥-吸引平衡，使得排斥力急剧增强，从而产生推力，将原子彼此分离。这一过程即为**跃迁冲击**，如图1所示，它构成了微观层面上动能产生的重要机制，也是动能由势能转化的来源。

跃迁冲击具有瞬时性和爆炸性，其本质类似于爆米花在受热后突然爆裂所释放的能量。跃迁冲击产生的动量将动能传递给邻近粒子，推动其分离或加速，从而激发并增强其运动。在微观尺度上，电子跃迁是一种普遍而持续发生的过程，存在于一切物质之中。因此，跃迁冲击广泛存在，并深刻影响诸多物理过程，尤其在热力学领域中具有基础性意义。它构成了多个自然

现象的底层机制，如布朗运动^[24-26]、相变现象^[27]、以及克鲁克斯辐射计的运行原理^[28-32]。从本质上讲，微观粒子的动能最终来源于辐射能，并反映出系统内部辐射和势能的变化这一动态过程。

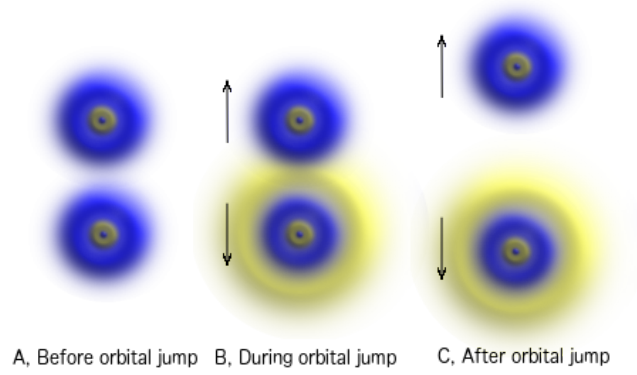


图1: 电子轨道跃迁引发的跃迁冲击

通过跃迁冲击，系统中的动能不断积累，但这种积累并非无限进行。动能最终需通过另一过程转化为其他形式的能量，这一机制称为**冲击跃迁** (impactrans)^[21]。在此过程中，分子、原子或亚原子粒子的运动或振动会通过库仑力作用与周围粒子发生碰撞，从而“击打”其电子，使其跃迁至不同轨道，甚至完全脱离原子体系，进而改变其势能状态。与此同时，受激电子在加速过程中会释放辐射能，实现动能向势能和辐射能的转化。因此，冲击跃迁是动能转化为势能与辐射能的重要机制。

动能向辐射能的转化可以在日常生活中的许多现象中观察到。例如，摩擦生热是由冲击跃迁引起的：当你搓动双手时，手感到的温暖来自于动能通过手部表面分子之间的静电相互作用转化为辐射能。同样，气筒底部的发热现象也可归因于局部粒子间频繁的冲击跃迁。再如，用塑料棒摩擦毛皮所产生的静电，其实质是外力使电子脱离原子，导致电荷在材料表面积聚。

我们已经探讨了各种形式的动态能量之间的转化机制。在**基本力**的作用下，势能趋向于降低，释放的能量以**辐射能**的形式发出。高水平的辐射能增加了其被势能成分（如轨道电子和化学键）吸收的可能性，从而将其重新转化为势能。这一过程还通过**跃迁冲击增强了粒子的动能**。当系统的动能较高时，冲击跃迁的概率增加，将动能转化为其他形式的能量。通过这些相互作用，系统最终会在不同形式的能量之间建立平衡分布。每当系统偏离这一平衡时，这些过程都会起到恢复作用。

动态能的平衡分布

一个系统中的三种动态能形式在上述机制作用下持续发生转化与交换。每种势能都在相应的推动力作用下使其减少，从而引导其随时间演化。虽然势能倾向于达到最小值——理论上在绝对零度时达到——但能量守恒要求某一形式能量的减少必须由另一形式的增加来补偿，尤其是辐射能。当辐射能处于高水平时，电子跃迁与跃迁冲击会增强，从而提升势能与动能。而较高水平的动能会加强冲击跃迁，进一步增加势能与辐射能。因此，只要系统在绝对零度以上，这些持续的能量转化与交换就会阻止势能达到绝对最小值。因此，系统会趋向于一种平衡分布，在各类能量之间形成稳定比例。在这种平衡状态，方程（5）可进一步展开为以下方程组：

(7) $U = uD$

(8) $K = kD$

(9) $R = rD$

(10) $u + k + r = 1$

动态能量成分，势能(u)、动能(k)和辐射能(r)，之间的比例在平衡状态下会收敛到稳定值，如表达式(6)所示。在特定的物质相中，这些比例通常变化很小，但在不同相之间，却可能存在如图2所示的那显著差异。温度反映的是辐射能水平，从而间接体现系统的整体动力能量水平。当能量在这些形式之间的分布在某一固定能级下偏离平衡比例时，体系会经历一个自发的再平衡过程，以恢复平衡比例。这种再平衡构成了许多物理体系中所观察到的方向性演化的根源。此外，每个能量成分也可能围绕其平衡值发生振荡，从而引发周期性或准周期性的波动。

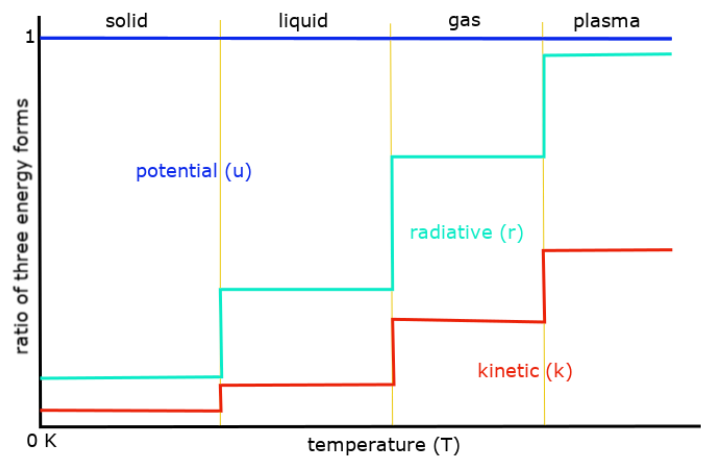


图2: 不同状态下三种动态能形式的平衡分布比例

从图2左侧开始，绝对零度代表系统动态能完全为零的理想状态^[11]。由于三种能量形式之间存在持续转化，这一条件要求势能、动能和辐射能必须同时归零。例如，即使动能和辐射能趋近于零，只要仍存在激发态电子，势能便会通过其跃迁转化为辐射，并可能被其他粒子吸收，重新激发。这类过程只要仍可能发生，系统就尚未真正达到绝对零度。

在固体中，动能主要来源于粒子的微弱振动，受限于分子键的束缚，水平较低；大部分动态能以势能形式储存。势能存在于轨道电子、分子和化学键中；辐射能则反映出多种键类型所对应的能级。随着系统吸收能量，其平衡暂时被扰动，通过能量再分配会以在更高能量水平上恢复平衡比例。部分能量增加了粒子的热运动，部分被储存在拉伸的键中，其余则表现为辐射增强。尽管系统能量水平升高，三种能量之间的相对比例仍基本保持稳定，直到相变发生。

相变过程本质上是分子间键的断裂。当这些键被拉伸至极限，无法继续延展而只能断裂时，系统便进入相变阶段。在此过程中，由于键已无法再储存能量，势能和辐射能趋于稳定，不再上升。此后，外界输入的能量主要用于断裂分子间键，并转化为分子运动的动能。由于温度主要反映系统的势能与辐射能水平，尽管动能持续增加，温度却保持恒定。因此，在相变过程中，温度实际上与动能变化脱节。

在液态中，部分分子间作用已断裂，系统储存势能的能力下降，势能和辐射能的比例减少。粒子运动不再局限于晶格位置，自由度显著提升，导致动能占比大幅上升，动态能的平衡结构随之改变，如图2所示。

尽管液态中分子间键已部分断裂，但残余的吸引力仍使粒子之间保持一定黏附性，限制其完全自由运动，表现出明显的黏滞性。在进一步的汽化过程中，分子间键完全断裂，势能储存能力进一步减弱；粒子获得完全的平移自由度，动能比例在气态中继续增加。此时，势能主要存在于轨道电子中；而对于多原子分子，更多的势能会储存在内部结构的化学键中。

进入等离子态后，所有分子键、化学键都被破坏，部分电子也脱离原子，意味着与库仑作用相关的势能近乎完全消失。系统的动态能主要表现为自由粒子的动能与辐射能。此时，高频辐射与粒子之间可以直接相互作用，实现高效能量交换。另一方面，核子间的强核势能在常规条件下不会释放出来，除非有核反应。

随着系统由低温固态逐步演化至高温等离子态，其动态能分布呈现以下趋势：在固-液转变中，弱的分子键断裂；在液-气转变中这些键完全消失；在气-等离子转变中，分子内部化学键断裂并发生电离。相应地，势能所占比例逐步下降，动能与辐射能则不断上升。特别是在等离子态，高频辐射与带电粒子间的直接作用显著增强能量交换效率。随着物态不断向低密度逐步相变，自由粒子的增多，使系统达到平衡所需时间缩短，响应速度加快。

综上所述，我们已建立回归原理的核心理论结构，包括动态能的分类(势能、动能、辐射能)、能量转换机制、以及平衡比例在系统演化中的作用。这一框架为理解自然系统在能量输入、输出或扰动后的响应行为提供了统一视角。在后续章节中，我们将结合实例，进一步应用该原理解释方向性演化与周期性振荡等自然现象，从而凸显回归原理的理论意义与预测价值。

库仑力主导的系统行为

如前所述，大尺度天体系统中的物质形态与行为主要由引力支配。相比之下，在较小的系统(如地球)中，物质能量(M)与动力能量(D)之间的转化相对罕见。相反，物质的状态和行为通常由在静电力作用下，不同形式的动态能之间的转化所决定。尽管在小系统中引力依然存在，但其强度远弱于库仑力，因此在微观尺度上可以忽略，此时带电粒子的行为主要受静电相互作用支配。因此，引力控制的是宏观过程，而相变与化学反应等现象则主要由库仑力驱动。在这一框架下，我们可以清楚地看到，地球上大多数过程都遵循回归原理，即在系统特定的总动态能水平下，使三种动态能量——势能 (U)、动能 (K) 与辐射能 (R)——之间重新达到平衡分布。

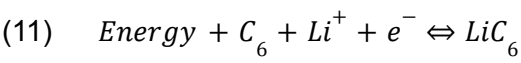
例如，为什么水会在低于冰点时凝固？在低动态能水平下，氢键——即水分子之间的库仑引力——占据主导地位，而其他相互作用则相对微弱。系统的大部分动态能以势能的形式储存在这些键中。这反映出系统倾向于将物质转变为一种能够容纳更多势能的状态，从而维持低动态能条件下所特有的高势能占比。

随着能量水平升高，三种动态能量都会增加。势能的增加会拉伸分子键，使其强度减弱；辐射能的增加则提升了跃迁冲击的强度和频率，最终可能打断这些已减弱的键，从而引发相变。结果，系统会在液态或气态中建立新的动态能量平衡比率，以适应较高的动态能量水平。

这个例子说明了物质状态如何根据不同的动态能水平进行调整，以维持与每一能量水平相适应的平衡能量分布。因此，物质的聚集或分散——表现为熵的减少或增加——反映了系统在不同能量水平下的行为，这一行为遵循潜在的回归原理。换句话说，动态能各形式之间的平衡比率决定了物质的状态。

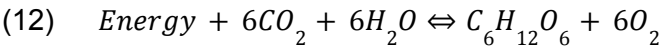
回归原理同样支配着物理、化学和生化反应。例如，在可逆反应中，加入反应物会推动反应向前进行，而移除反应物则会使反应向后移动。每种化学物质在特定的动态能水平下具有其特征性的动态能平衡比率。反应平衡体现了反应物与生成物的稳定比率，从而决定了整体能量分布。当通过加入或移除反应物或生成物扰乱这一平衡时，系统会通过相应生成更多的生成物或反应物来恢复平衡。根据质量-能量等价原理，能量本身也可以作为反应物或生成物参与吸收或释放能量的反应，因此向系统添加能量等效于加入化学物质。

例如，锂离子电池的充放电循环同样遵循回归原理，其作用在于在不同能级下重新建立各种动态能量形式之间的平衡比。在充电过程中，正负极之间所施加的电压通过提高势能来提升体系的能量水平，这一外部能量输入扰乱了原有的平衡。为恢复平衡，锂离子 (Li^+) 从正极晶格经电解质迁移至负极，并嵌入石墨层间，从而储存所增加的势能：



实际上，电池将能量储存在负极内部化学键的化学势中。当电池为设备供电时，这一过程会反向进行。此时，电池所具有的势能高于设备。为了在这种情况下重新建立平衡，锂离子 (Li^+) 会从负极脱嵌，并通过电解质迁移回正极。在正极处，它们与流入的电子重新结合，并重新嵌入晶格。储存的化学能因此转化为电能，从而降低电池的势能。

类似于电池，生命系统在进化过程中也发展出了自身的生物能量储存形式。一个典型的例子就是光合作用，其可用以下化学方程式表示：



在光照下，二氧化碳与水反应生成葡萄糖并释放氧气。从回归原理的角度出发，光能的输入扰乱了系统原有的动态能平衡比率。为了恢复平衡，系统将多余的辐射能重新分配到其他能量形式中，包括储存在葡萄糖化学键中的势能。换句话说，当外部能量打破系统的平衡时，系统通过物质的自发转化作出响应，生成能够容纳额外能量的新分子结构，从而建立新的平衡。

这一过程是可逆的。在没有光照的夜间时，体系的辐射能水平下降，能量水平及分布随之发生变化。为了重新建立平衡比，植物会代谢储存的葡萄糖，降低化学键中所含的势能，并释放热量，同时生成水和二氧化碳作为副产物。

本质上，通过调节反应两端组分的相对数量，体系能够根据其能量水平维持动态能的平衡比，从而使反应方向随着能量供给的变化而发生改变。这个过程展示了**回归原理**如何调控化学反应的行为，并由此扩展至对生命系统运作的调节。

塑造生命的形态与演化

电池在其设计的充放电电压范围内性能最佳。同样，由反应 (12) 所代表的“生物电池”也只有在特定条件下(如地球上的温度和阳光范围内)才能达到最高效率。超出这些范围，其效率会下降，从而削弱生命活动的效率。为了优化能量利用，生物系统在进化过程中发展出多种适应性，以契合各自的环境，获得选择优势并实现进化上的成功。从这个意义上说，生命本身的演化亦受恢复原理的支配。

例如，热带地区的植物通常会会长出大而常绿的叶子，以在阳光充足的环境中最大化光能吸收。相比之下，许多温带植物会落叶，以应对季节性能量供应的下降。在寒冷或山区环境中，针状叶有助于减少能量损失并节约水分。同样，由于季节性能量波动，一些动物会迁徙以追随更适宜的环境，而另一些动物则在冬季进入冬眠状态，因为在寒冷环境中维持体温需要消耗大量能量。通过进入休眠状态，这些生物可以降低代谢率，最小化能量消耗。这些适应性策略展示了回归原理在生物系统中体现的多种方式。

上述例子说明了生命形式是如何在地球正常环境条件下得到优化的。然而，如果这些生物被迁移到截然不同的环境——例如温泉中——它们通常无法存活，因为那里的动态能量平衡比率不同，它们的“电池”也无法正常运作。尽管如此，某些细菌却

能在摄氏高达60–80度的温泉中生存。许多温泉微生物并非依赖光合作用，而是通过化学合成来获取能量，例如氧化硫、铁或氢。在温泉较凉的边缘区域，蓝藻则进行光合作用，形成色彩斑斓的微生物席。

随着人工智能技术的迅猛发展，一个发人深省的问题随之而来：硅基生命或智能是否可能最终取代碳基人类？这一问题可以通过回归原理来审视。地球的能量水平决定了能量分布的最佳平衡比，而在数十亿年的演化过程中，碳基生命表现出最强的适应性，自然地与地球的能量条件相契合。除非地球的能量格局发生剧烈转变，否则硅基生命在能量优化方面不太可能获得相对于碳基生命的自然或竞争优势。换言之，若硅基生命存在，它必须产生于与当今地球环境完全不同的能量水平与生态系统之中。此外，当下人工智能技术所需的巨大能量需求，更凸显其在地球现有能量约束下缺乏可持续性。

经济学中的“无形之手”

经济学的基本原理是在有限资源条件下做出理性选择，以实现收益最大化。与生命进化相比，这一原理根植于回归原理。经济系统的行为最终受人类需求和欲望驱动，而这些需求和欲望，像所有生物体一样，同样受回归原理影响。作为地球生态系统中的一员，人类——与其他生物一样——依赖食物和其他物资生存。生产这些必需品需要能量，而人类生存与工业活动都依赖于高效使用能量。从本质上讲，这体现了生命维持过程的基本要求：以最小能量消耗维持生命，并保持能量使用接近平衡，从而实现优化。

如果生命形式是在地球环境条件下被动地由回归原理塑造，而经济活动则是人类通过对同一原理的主动应用来掌控。例如，考虑两家公司A和B，它们生产的牛奶质量相同，最初售价也相同。公司A通过优化生产工艺，降低能量消耗和成本，从而在保持盈利的同时降价。消费者自然选择更便宜的产品，使公司A获得竞争优势。公司B无法匹配低价，失去市场份额，甚至可能倒闭。这个例子表明，在竞争环境中优化能量利用效率可决定长期成功，凸显回归原理在经济系统中的核心作用。

这一原理同样体现在金融市场中。虽然债券和股票价格在短期内会波动，但其长期价值始终锚定于内在价值。投资决策通常以最大化回报并最小化成本为目标。高收益机会会迅速吸引资本，然而过度投资会使价格高于内在价值，从而削弱回报。随着竞争加剧、利润下降，资本会转向更新、更具潜力的机会，有时甚至会使价格跌破内在价值。这些高估与低估的循环引发持续的波动。通过这种资源的动态再分配，各行业被引导有效运作，从而依循回归原理，最终使金融市场围绕同一能量优化目标而形成。

从本质上看，所有资源——无论金融、物质还是其他形式——都可以被理解为能量的表现，或是获取这些资源所需能量的替代物。从这个角度来看，经济活动的每一个方面都围绕着能量的转化、储存、交换与消耗展开。人类的决策过程或许显得复杂，但其背后的基本要求始终不变：在最大化能量回报的同时尽可能减少能量支出。因此，能量效率既是生命系统得以生存的基础，也是经济可持续性的根本，并在实践中体现了“回归原理”。

均衡与能量平衡分布

均衡通常指对立的影响或力量相互抵消的状态，因此系统在未受到扰动时不会发生变化。这个概念在不同学科中有不同的形式和定义。在热力学中，当两个不同温度的系统相互作用时，能量会在它们之间交换，直到温度趋于一致；此时能量在两个方向上的净流动相等，表现为热均衡。在化学中，当正反应与逆反应以相同速率进行时，反应物和生成物的浓度保持不变，即达到化学均衡。在生态学中，当物种种群与资源维持相对稳定的关系时，系统即处于生态均衡。在经济学中，当供给与需求相匹配时，市场价格趋于稳定，体现为市场均衡。在力学中，当作用在一个物体上的所有力和力矩相互抵消时，物体不会加速，因而保持静止或作匀速运动，即处于力学均衡。

所有这些均衡都是在回归原理支配下**能量平衡分布**的不同体现。由于万物以某种形式的能量存，所有现象和行为都可以理解为能量转化的过程。例如，电池或生物电池的充放电过程展示了系统如何在环境变化时建立新的均衡。充满电的电池便是高能量水平下的一种平衡表现。由于能量可以呈现多种形式——包括物质本身——这些转化可能涉及不同类型能量之间或物质形态之间的转换。尽管形式多样，它们都具有共同的趋势：趋向于能量的平衡分布，从而产生不同形式的均衡。因此，回归原理可被视为一切均衡的底层机制。

结论

宇宙的一切存在，皆表现为能量及其持续的相互转化。任何系统的主导作用力取决于其总能量，决定着物质的形态与动态。在大尺度的天体系统中，引力占据主导地位，形成了诸如黑洞和中子星等结构；在较小尺度的系统中，例如地球，库仑力则为主要作用力。在此类系统中，主导相互作用取决于动态能量的水平：当动态能量较低时，吸引性的静电力占优势；当能量较高时，排斥性作用力则占据主导。在这样的系统中，物质通过三种动态能量形态——势能、动能和辐射能——的相互转化而演化。这些转化推动系统趋向一种稳定分布，即所谓的动态能量平衡比。当这种平衡被扰动时，系统会自发地作出响应，或通过周期性的振荡，或通过渐进性的演化，以恢复平衡。这一普遍趋势，被概括为**回归原理**，为理解物理、生物乃至社会领域的系统行为提供了统一的框架。与此相对，经典熵概念强调能量的弥散趋势。在排斥相互作用为主导的系统中，这一规律成立，但在吸引相互作用占优的系统中则可能出现相反的趋势。因此，热力学第二定律仅描述了自然过程中的一个子集，而未能揭示宇宙整体的动态本质。

版本更新

- [05/23/2025: 本文在斯坦福初始发布](#)
- [11/01/2025: 在Zenodo上发表](#)
- [12/18/2025: 增加相关文章摘要连接](#)

相关文章摘要链接

- <https://cs.stanford.edu/people/zjl/abstractc.html>, [PDF](#)
- <https://sites.google.com/view/zjlc/>, [PDF](#)
- <https://xenon.stanford.edu/~zjl/abstractc.html>, [PDF](#)
- <https://doi.org/10.5281/zenodo.17972005>, [PDF](#)

相关文献

- [热力学中的错误概念 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [克鲁克斯辐射计旋转的驱动机制 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [布朗运动的原动力 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [温度是分子平均动能的标志吗? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [绝对零度的本质 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)

- [能量转换三角 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [热膨胀是由于粒子振动引起的吗? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [超流体不是流体 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [为什么相变温度保持恒定 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [摩擦为何会产生热量? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [简明熵概念 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [熵可以减少 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [回归原理 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [金属中是否存在自由电子海? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [电子通道: 导体超导统一论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [低温和高温超导统一理论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [LK-99的局限和意义 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [地球磁场超导起源说 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [关于质量的本质问题 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [从万有引力定律到广义相对论的演化 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [爱因斯坦质能方程的最简单推导 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [如何理解相对论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [数学并非科学 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [潮汐能并非可再生能源 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [AI 知识污染 \(PDF\) \(中文\)](#)
- [DeepSeek pk ChatGPT \(PDF\) \(中文\)](#)

参考文献

1. Dugdale, J.S. (1996). "[Entropy and Its Physical Meaning](#)". *Taylor & Francis*. p. 13. ISBN 978-0-7484-0569-5.
2. Wright, S.E.; et al. (2001). "On the Entropy of Radiative Heat Transfer in Engineering Thermodynamics". *Int. J. Eng. Sci.* **39** (15): 1691–1706. doi:[10.1016/S0020-7225\(01\)00024-6](#).
3. Reif, F. (1965). "Fundamentals of Statistical and Thermal Physics". *McGraw-Hill*, New York.
4. Carey, V. (1999). "Statistical Thermodynamics and Microscale Thermophysics". Cambridge University Press.
5. Narimanov, E.E.; Smolyaninov, I.I. (2012). "Beyond Stefan–Boltzmann Law: Thermal Hyper-Conductivity". *Conference on Lasers and Electro-Optics 2012*. OSA Technical Digest. Optical Society of America. pp. QM2E.1. doi:[10.1364/QELS.2012.QM2E.1](#).
6. Vertical Learning Labs. (2011). "[Molecular Speed Distribution](#)". *Introduction to Chemistry*, Unit 1.5.
7. Osborne, R. (1879). "On Certain Dimensional Properties of Matter in the Gaseous State". *Royal Society Phil. Trans.*, Part 2.
8. Boltzmann, L. (1895). "On Certain Questions of the Theory of Gases". *Nature*, **51** (1322): 413–415.
9. Liu, J.Z. (2025). "[Entropy Can Decrease](#)". *Stanford University*. Archived (PDF). doi:[10.5281/zenodo.17504814](#)
10. Liu, J.Z. (2023). "[Can Temperature Represent Average Kinetic Energy?](#)". *Stanford University*. Archived (PDF). doi:[10.5281/zenodo.17503871](#)
11. Liu, J.Z. (2023). "[The Nature of Absolute Zero Temperature](#)". *Stanford University*. Archived (PDF). doi:[10.5281/zenodo.17504015](#)

12. Chandrasekhar, S. (1931). ["The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs"](#). *Astrophysical Journal*. **74**: 81–82. Bibcode:[1931ApJ....74...81C](#). doi:[10.1086/143324](#).
13. Chandrasekhar, S. (1935). ["The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass \(second paper\)"](#). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. **95** (3): 207–225. Bibcode:[1935MNRAS..95..207C](#). doi:[10.1093/mnras/95.3.207](#).
14. Oppenheimer, J. R.; Volkoff, G. M. (1939). "On Massive Neutron Cores". *Physical Review*. **55** (4): 374–381. Bibcode:[1939PhRv...55..374O](#). doi:[10.1103/PhysRev.55.374](#).
15. Bombaci, I. (1996). "The Maximum Mass of a Neutron Star". *Astronomy and Astrophysics*. **305**: 871–877. Bibcode:[1996A&A...305..871B](#).
16. Kalogera, V; Baym, G (11 August 1996). "The Maximum Mass of a Neutron Star". *The Astrophysical Journal*. **470**: L61 – L64. arXiv:[astro-ph/9608059v1](#). Bibcode:[1996ApJ...470L..61K](#). doi:[10.1086/310296](#). S2CID [119085893](#).
17. Flanagan, É.É.; Hughes, S. A. (2005). ["The Basics of Gravitational Wave Theory"](#). *New Journal of Physics*. **7** (1): 204. arXiv:[gr-qc/0501041](#). Bibcode:[2005NJPh....7..204F](#). doi:[10.1088/1367-2630/7/1/204](#). ISSN [1367-2630](#).
18. Maxwell, J.C. (1875). "The Question of the Atom". *J. Chem. Soc. (London)*, Facsimile published in Mary Jo Nye, **1875** (28): 493-508.
19. Liu, J.Z. (2023). ["Is Thermal Expansion Due to Particle Vibrating?"](#). *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17504268](#)
20. Barry, C.B. (2016). ["The Detection of Gravitational Waves with LIGO"](#) (PDF). [UCLA](#). [Archived](#) (PDF) from the original on 2016-03-03.
21. Liu, J.Z. (2019). ["The Process Driving Crookes Radiometers"](#). *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17503377](#)
22. Vijay, R.; et al. (2011). "Observation of Quantum Jumps in a Superconducting Artificial Atom". *Physical Review Letters*. **106** (11): 110502. arXiv:[1009.2969](#). doi:[10.1103/PhysRevLett.106.110502](#). PMID [21469850](#).
23. Itano, W.M.; et al. (2015). ["Early Observations of Macroscopic Quantum Jumps in Single Atoms"](#). *International Journal of Mass Spectrometry*. **377**: 403. doi:[10.1016/j.ijms.2014.07.005](#).
24. Liu, J.Z. (2019). ["The Cause of Brownian Motion"](#). *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17503671](#)
25. Feynman, R. (1964). ["The Brownian Movement"](#). *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I. pp. 41.
26. Einstein, A. (1926). ["Investigations on the Theory of the Brownian Movement"](#). *Dover Publications*.
27. Liu, J.Z. (2023). ["Why Phase Transition Temperature Remains Constant"](#). *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17504663](#)
28. Gibbs, P. (1996). ["How Does a Light-Mill Work?"](#). *Usenet Physics FAQ*. Retrieved 8 August 2014.
29. Crookes, W. (1874). ["On Attraction and Repulsion Resulting from Radiation"](#). *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. **164**: 501–527. doi:[10.1098/rstl.1874.0015](#).
30. Brush, S.G.; Everitt, C.W.F. (1969). ["Maxwell, Osborne Reynolds, and the Radiometer"](#). *Historical Studies in the Physical Sciences*, vol. 1, 1969, pp. 105–125.
31. Wolfe, D.; et al. (2016). ["A Horizontal Vane Radiometer: Experiment, Theory, and Simulation"](#). *Journal-ref: Phys. Fluids* **28**, 037103. Department of Physics, Naval Postgraduate School, Monterey, CA 93940, USA. **28** – via arXiv.
32. Yarris, L. (2010). ["Nano-sized Light Mill Drives Micro-sized Disk"](#). *Physorg*. Retrieved 6.