从万有引力定律到广义相对论的演化

刘正荣
ZJL@CS.Stanford.EDU
此内容由人工智能(AI)辅助翻译，若未达意，请查阅原文

前言

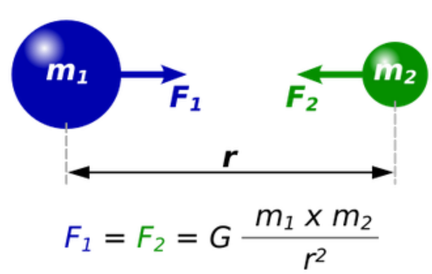
阿尔伯特·爱因斯坦的场方程是广义相对论的核心所在。然而，它并非单纯源自思想实验，而是众多学科发展成果的结晶，凝聚了无数杰出思想家的智慧。通过追溯牛顿万有引力定律的发展历程，我们可以深入理解爱因斯坦场方程的形成过程。这一历史视角不仅有助于揭示其背后的物理原理，也加深了我们对牛顿与爱因斯坦卓越贡献的认识与敬意。

本文首先回顾牛顿对万有引力定律的发现。在这一奠基性成果的基础上，库仑及其同时代人提出了描述电荷间静电作用力的类似定律。牛顿定律与库仑定律均表明，相互作用力与两个物体间距离的平方成反比。在这些基本定律的启发下，数学家进一步发展出高斯通量定律，该定律后来成为麦克斯韦电磁理论的基石之一。随着对力场概念的进一步抽象，泊松方程应运而生，它将势场与其场源——即产生该场的物质密度——联系起来。最终，爱因斯坦的场方程可被视为泊松方程在时空结构层面上的深刻拓展。

牛顿的万有引力定律

早期科学的许多概念源自哲学思考，重力的观念亦不例外。例如，亚里士多德认为石头滚落，是因为它们天生倾向于回归其“自然位置”。在艾萨克·牛顿提出理论之前，有关物质与运动的基本思想已逐渐萌芽。伽利略·伽利莱通过大量实验，细致观察物体的下落与滚动行为；与此同时，约翰内斯·开普勒则通过研究天体运动，提出了描述行星运行和引力作用的三大定律。

艾萨克·牛顿将开普勒定律推广到月球绕地球的运动，进一步提出，这些规律同样适用于地球上的一切物体。结合自己的运动定律，通过数学分析，在开普勒的经验性观测基础上，1687年，牛顿正式提出**万有引力定律**。



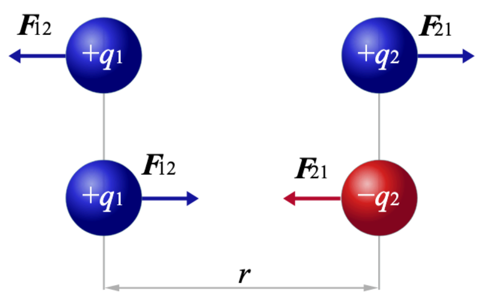
这个万有引力是指：任意两个物体之间都存在相互吸引，其大小与两者质量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比：

(1) $$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

其中，F表示两个质量分别为m_1和m_2、相距r的物体之间的引力；G为牛顿引力常数，其数值为$6.67\times10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$。

库仑定律

古代人发现，某些物体与毛皮等材料摩擦，能够吸引如羽毛般的轻质物体。在这些早期观察的基础上，威廉·吉尔伯特开始对电与磁现象进行系统研究，特别关注摩擦琥珀所产生的静电效应。研究人员还注意到，电力随距离增加而减弱，其规律与引力的衰减方式相似。通过对带电小球的实验，弗朗茨·艾皮努斯与约瑟夫·普里斯特利率先提出，电力可能也遵循平方反比定律，类似牛顿的万有引力定律。然而，与万有引力不同，约翰·罗宾逊发现，当两个小球带有相同电荷时，它们之间会产生排斥力。



$$\left|F_{12}\right| = \left|F_{21}\right| = k_e \frac{|q_1 \times q_2|}{r_2}$$

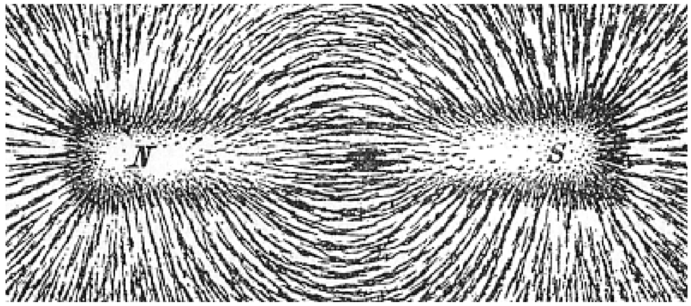
夏尔–奥古斯丁·库仑利用扭秤实验研究带电粒子之间的吸引力与排斥力，发现两个点电荷之间的电力大小，与它们电荷量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比。1785年，他发表了这一成果，后来被称为**库仑定律**：

(2) $$F = k\frac{q_1 q}{r^2}$$

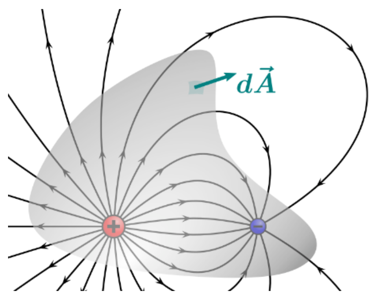
在该公式中，正F值表示两个电荷q_1和q_2之间的排斥力，负值则表示吸引力；r为两电荷之间的距离，k是库仑常数，其数值为$8.99\times10^9 Nm^2C^{-2}$。库仑定律是电磁学理论发展的基石之一。

高斯定律

将铁屑撒在覆盖条形磁铁的纸上时，铁屑会沿磁场方向排列，呈现出磁力线的分布，如下图所示。这些磁力线也可以通过测量空间中各点的磁场强度与方向来绘制：在每个位置上画出一个向量，方向表示局部磁场方向，长度则与磁场强度成正比。连接这些向量，便构成了一组磁力线。磁力线类似于流体中的流线，形象地描绘了磁场在空间中的连续分布。



受磁力线观测的启发，科学家们认为，万有引力和静电力同样以环绕力源矢量场的形式分布在空间中。场的强度不仅可以通过矢量的长度来表示，也可以通过场线的密度直观反映，如下图所示。



高斯定律是一种数学抽象，适用于引力场和电磁场。它表明，任意闭合曲面上的场通量与被包围的场源的总量成正比，而与场源的具体分布无关。引力场中的场源为质量，电场中的场源为电荷。虽然高斯定律本身不足以确定场的具体分布，但对均匀分布的场可大幅简化问题。对于非均匀分布的场，高斯定律以微分形式表达，即场的散度与源的局部密度成正比，具体形式为：

(3) $$\nabla \bullet F = k\rho$$

其中，∇表示微分算符，**F**代表场的分布；ρ是场源的密度；k是与场类型相关的常数。对于电场，该公式通常写作：

(4) $$\nabla \bullet E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

其中，**E**表示电场，ρ为电荷密度，ε_0是真空介电常数。需要指出的是，公式(4)正是麦克斯韦方程组的第一方程。

泊松方程

在由密度为ρ的物体产生的引力场**F**中，高斯定律(公式3)可写作：

(5) $$\nabla \bullet F = -4\pi G\rho$$

该定律可用来推导引力场的泊松方程。由于引力场是保守场，可以用标量势φ来描述：

(6) $F = -\nabla\varphi$

将此代入高斯定律的公式(5)中:

(7) $\nabla \bullet (-\nabla\varphi) = -4\pi G\rho$

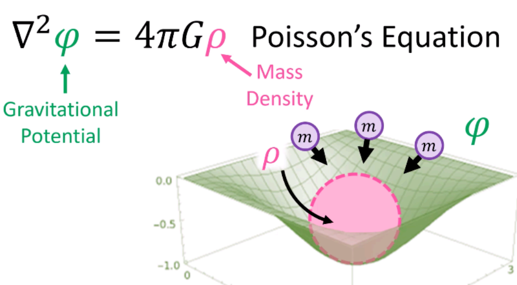
由此便得到引力场的泊松方程:

(8) $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$

其中, ∇^2是拉普拉斯算子。当质量密度为零时, 泊松方程退化为拉普拉斯方程。相应的格林函数可用来计算中心质量为m距离r处的势, 具体表达式为:

(9) $\varphi(r) = \frac{-Gm}{r}$

这与牛顿的万有引力定律等价。物理上, 泊松方程描述了质量密度ρ如何在引力势φ中形成局部凹陷, 进而吸引附近的质量。下面以示意图对此说明。

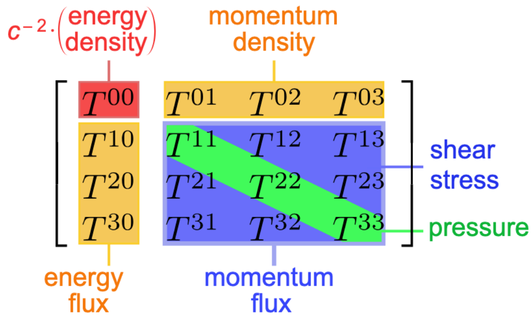


爱因斯坦场方程

爱因斯坦场方程是泊松方程(公式8)的推广, 其中引力势由爱因斯坦张量$G^{\mu\nu}$取代, 质量密度则由能量–动量张量$T^{\mu\nu}$取代:

(10) $G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$

方程中的每个张量都是一个4×4的矩阵, 因此爱因斯坦场方程实际上包含16个方程的紧凑表达。例如, 能量–动量张量$T^{\mu\nu}$就是一个4×4的矩阵:



乍一看，从泊松方程过渡到爱因斯坦场方程似乎十分自然。然而实际上，这两者之间在概念和数学上存在显著差异。在广义相对论中，与泊松方程最接近的类比，是将引力势替换为里奇张量的时间-时间分量R^{00}，而将质量密度替换为能量–动量张量的对应分量T^{00}：

(11) $$R^{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{00}$$

这被称为泊松方程的牛顿–卡坦（Newton–Cartan）表达式。为了在该框架下将泊松方程中的质量密度项转化为能量–动量张量，需要对密度在体积上积分，并乘以光速的平方。然而，这一形式本身并不完全满足相对论要求，因为里奇张量和能量–动量张量的其他分量在不同参考系下并不协变，受到时间膨胀和长度收缩等相对论效应的影响。为解决这一问题，必须将里奇张量和能量–动量张量的全部4×4分量纳入方程：

(12) $$R^{\mu\nu} \approx \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

其中，上标μ和ν取0到3，对应时间和三个空间维度，因此方程中的每个张量都是一个4×4的矩阵。方程中重复上标都隐含对其分量求和，这一惯例称为**爱因斯坦求和约定**。乍一看，方程似乎平衡，但由于张量在协变导数和度规收缩下的散度性质存在差异，导致方程两边出现细微不对称。为纠正这一问题，爱因斯坦在方程左侧引入了如下式中的一个额外项：

(13) $$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

其中，R表示标量曲率，$g^{\mu\nu}$是用于附加项的度规张量。方程左侧整体构成了爱因斯坦张量$G^{\mu\nu}$，因此，方程（10）是该方程的缩写形式。需要注意的是，指标可通过逆度规张量进行升降，因此根据不同文献的惯例，方程中可能使用上下标表示。

根据大爆炸理论，宇宙在时间和空间上都是有限的。将方程（13）应用于宇宙学时，最初认为宇宙会因自身引力最终收缩。然而，现代天文观测表明宇宙不仅在膨胀，而且膨胀速度还在加快。为解释这种加速膨胀，爱因斯坦在方程左侧引入了宇宙学常数项，代表推动膨胀的一种能量形式：

(14) $$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

其中，Λ代表宇宙常数，约为$1.4657\times10^{-52}\mathrm{m}^{-2}$。宇宙常数对应的正真空能量密度带来负压强，这种负压推动宇宙加速膨胀。由于这种能量尚未被直接探测，通常称为暗能量。因宇宙常数极其微小，其效应仅在宇宙大尺度上显著。爱因斯坦场方程应用于较小或局部尺度现象时，如黑洞，宇宙常数的影响通常可忽略。

版本更新

- 07/21/2025: 本文在斯坦福初始发布
- 11/02/2025: 在Zenodo上发表
- 12/18/2025: 增加相关文章摘要连接

相关文章摘要链接

- https://cs.stanford.edu/people/zjl/abstractc.html, PDF
- https://sites.google.com/view/zjlc/, PDF
- https://xenon.stanford.edu/~zjl/abstractc.html, PDF
- https://doi.org/10.5281/zenodo.17972005, PDF

相关文献

- 热力学中的错误概念 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 克鲁克斯辐射计旋转的驱动机制 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 布朗运动的原动力 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 温度是分子平均动能的标志吗? (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 绝对零度的本质 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 能量转换三角 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 热膨胀是由于粒子振动引起的吗? (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 超流体不是流体 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 为什么相变温度保持恒定 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 摩擦为何会产生热量? (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 简明熵概念 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 熵可以减少 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 回归原理 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 金属中是否存在自由电子海? (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 电子通道: 导体超导统一论 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 低温和高温超导统一理论 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- LK-99的局限和意义 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 地球磁场超导起源说 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 关于质量的本质问题 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 从万有引力定律到广义相对论的演化 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 爱因斯坦质能方程的最简单推导 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 如何理解相对论 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 数学并非科学 (PDF: DOI) (中文: DOI)
- 潮汐能并非可再生能源 (PDF: DOI) (中文: DOI)

- AI 知识污染 (PDF) (中文)
- DeepSeek pk ChatGPT (PDF) (中文)