

热膨胀是由于粒子振动引起的吗？

刘正荣

ZJL@CS.Stanford.EDU

此内容由人工智能(AI)辅助翻译, 若未达意, 请查阅[原文](#)

摘要

与通常认为热膨胀源于粒子振动增强的观点不同, 我们的研究表明, 热膨胀主要源于粒子键空间的扩大, 以容纳更多的势能。如果仅由振动引起膨胀, 那么随着温度升高, 物质体积应始终增加, 因为振动强度通常随温度升高而增强。然而, 许多物质在升温时却出现热收缩, 显然违背了这一假设。化学键类似弹簧, 可以储存拉伸后的势能。当物质吸收热量时, 电子跃迁至更高能级, 表现为势能的增加。同样, 键距的拉伸也反映出势能的提升。在比热特性中, 这一点尤为明显。尤其是多原子气体, 比热与分子内部键的数量相关, 说明部分热能转化为分子键的势能, 而非完全转化为动能。由此可见, 热膨胀的本质, 是物质在吸热后为储存更多能量而扩张结构空间的结果。这种结构扩张表现为电子轨道的跃迁, 分子键的拉伸、分子间距增大, 进而导致体积变化。归根结底, 物质的体积由其内部的粒子键结构决定。这一观点也能解释某些特殊情况下的热收缩现象。例如水在接近摄氏度4时, 由于分子排列更为紧凑, 反而导致体积减小。

前言

热膨胀是指物质在不发生相变的情况下, 因温度变化而导致其形状、面积、体积和密度发生变化的现象^[1]。传统教材常将热膨胀归因于分子振动加强, 认为高温下分子振幅增大, 从而需要更大的空间。维基百科也提供了类似的解释, 如图0所示。然而, 这种解释具有误导性。

Thermal expansion is the tendency of matter to increase in length, area, or volume, changing its size and density, in response to an increase in temperature (usually excluding phase transitions).^[1] Substances usually contract with decreasing temperature (thermal contraction), with rare exceptions within limited temperature ranges (negative thermal expansion).

Temperature is a monotonic function of the average molecular kinetic energy of a substance. As energy in particles increases, they start moving faster and faster, weakening the intermolecular forces between them and therefore expanding the substance. When a substance is heated, molecules begin to vibrate and move more, usually creating more distance between themselves.

图0: [维基百科关于“热膨胀”解释](#)截图 (2025年10月22日)。

振动理论建立在三个关键假设之上：(1)温度代表动能；(2)动能来源于分子振动；(3)分子振动需要更多空间。如果这些假设成立，那么物质的体积应随温度升高而持续增加，因为热量增加会加剧分子振动，理论上应无例外。然而，现实中许多物质在升温时却出现热收缩现象，这直接挑战了该理论的合理性^[2-3]。例如，水在摄氏度4时体积最小，升温或降温都会导致其膨胀，这种行为与振动理论的预测矛盾，揭示了其逻辑上的根本问题。

从直观角度看，振动理论也难以自洽。在固体中，分子被束缚于晶格或分子网络中，类似树木扎根于森林。分子振动就如同树木在风中摇摆，对整体结构影响有限。如果热膨胀仅由振动引起，那么一段铁轨在受热时，其膨胀应主要出现在两端。然而，实际观察显示，热膨胀沿整条轨道均匀发生，表明其是一个结构层面的累积过程，而非边界处的微小偏移。这种现象难以用单纯的振动机制解释。

振动理论的根本问题在于其基本假设中至少有两项与事实不符。首先，将温度与动能简单直接关联是一种误解。正如《[温度是分子平均动能的标志吗？](#)》一文所指出，温度并不直接反映系统的平均动能，而是体现内能中的动态分量，尤其是势能^[4]。其次，热膨胀更可能是分子间键结构发生变化的结果，而非分子振动的简单放大。这一观点构成本文所提出新理论的基础。

温度与动能的关系偏差分析

若温度完全由系统的动能所决定，则温度与动能的变化应可直接用于计算比热。比热定义为使单位质量的物质温度升高一摄氏度所需的能量。根据动力学理论，在理想气体中，至少在理想温度和压力范围内，温度与分子平均速率相关^[5-7]：

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

其中，m表示气体分子的质量，T为绝对温度， k_B 代表玻尔兹曼常数^[8]，而v是气体分子的平均速率。因此，根据气体动力学理论，理想气体中单个分子由于热运动所具有的平均动能可表示如下：

$$(2) \quad K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

由此可见，气体分子的动能与系统的绝对温度呈正比关系。该公式反映了一个广泛接受的观点：温度代表体系中粒子的平均动能。因此，每摩尔气体分子的总动能可表示为：

$$(3) \quad K_m = KN_A = \frac{3}{2}k_B N_A T = \frac{3}{2}RT$$

其中， N_A 表示阿伏伽德罗常数，R为气体常数。假设比热所提供的能量全部用于增加气体分子的动能，则比热可依据动力学理论进行推导。按照定义，摩尔比热是指使一摩尔物质升高一摄氏度所需的能量。因此，气体的摩尔比热可由公式(3)推导如下：

$$(4) \quad C_m = \frac{K_m}{T} = \frac{3}{2}R$$

也就是说，根据动力学理论，理想气体的摩尔比热应为常数，且对所有理想气体均相同。该预测与单原子气体的实验数据高度吻合，准确率超过99%。然而，该理论不能准确描述多原子分子气体的比热，预测值普遍低于实测值，且随着分子复杂度的增加，误差逐渐扩大。以辛烷为例，其理论预测的比热仅约为实测值的7%，对应约93%的预测误差。

为探究比热预测中能量缺失的根源，针对不同分子复杂度的理想气体进行了比热测量实验。结果分析表明，预测值与实测值的差异与分子键数呈显著正相关，如图1所示。这表明，未计入的能量主要用于提升分子键的势能。分子键如同弹簧，拉伸时储存能量。当原子或分子间键长被拉伸时，所做的功以势能形式储存在伸长的键内。

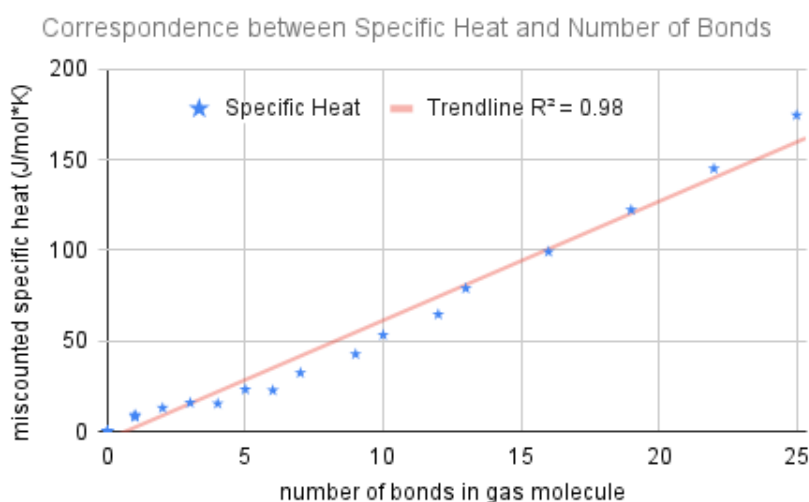


图1: 缺失的摩尔比热与分子键数的关系。缺失的比热指实验测量值与动力学理论预测值(公式4)之差。拟合直线斜率约为6.56, 决定系数(R^2)为0.98, 表明两者呈高度线性相关。

这一发现带来两个重要启示: 首先, 温度并不只是动能的度量; 其次, 它更本质地反映了系统内部的势能状态。这一认知促使我们重新审视传统的温度观, 并深入探讨**动态能**这一更为全面的能量描述方式。

什么决定温度？

温度通常被视为系统热能的表现，而热能往往被理解为分子的热运动，因此，温度被认为是分子平均动能的指标。然而，前述观察表明，这一传统观点可能并不完整，甚至存在误导。温度与动能之间存在本质性的脱节。许多温度测量设备，尤其是红外测温仪，并非直接测量动能，而是通过探测辐射能来推断温度。理想黑体辐射行为遵循普朗克定律，该定律揭示了辐射频谱分布与温度之间的关系^[9-11]。对普朗克定律在全频率范围内积分后，可得到理想黑体所发出的总辐射功率 P ，该功率与绝对温度的四次方成正比，即斯特藩-玻尔兹曼定律所述的关系^[12-13]：

$$(5) \quad P = pT^4$$

其中， p 表示斯特藩—玻尔兹曼常数。重新整理该公式，可以将温度表示为目标物体辐射功率的函数：

$$(6) \quad T = \sqrt[4]{\frac{P}{p}}$$

该关系表明，系统的辐射特性可用于预测其温度，构成了温度测量仪器的理论基础。这正是红外测温仪可以遥测目标物体温度的原理。

普朗克定律的另一个推论是维恩位移定律，其指出：辐射峰值波长与温度成反比。也就是说，随着温度升高，辐射曲线的峰值将向更短波长方向移动：

$$(7) \quad \lambda = \frac{b}{T}$$

其中， λ 表示辐射曲线的峰值波长， b 为维恩位移常数。该关系亦可通过推导普朗克辐射曲线的峰值获得，即对其波长形式求导并求解极值。对所得方程进行整理后，可将温度表示为峰值辐射波长的函数：

$$(8) \quad T = \frac{b}{\lambda}$$

该关系表明，通过测量系统所发射辐射的峰值波长，即可推算其温度。维恩位移定律描述了温度与辐射峰值波长之间的反比关系，这一规律在很多方面得到应用。例如，经验丰富的面包师可通过火焰的颜色判断烤箱的温度。类似地，太阳表面温度约为5,778K，借此可以推断其辐射峰值波长约为500纳米，正好位于可见光范围内。这些例子说明，温度本质上与辐射源所发出的能量密切相关。

辐射与系统内部的势能密切相关。当物体加速时，其伴随的力场变化会以波动形式释放能量^[14–15]。例如，带电粒子在轨道间跃迁时，会辐射能量，包括可见光。本质上，辐射能来源于化学键或轨道电子中储存的势能转化。这一视角有助于理解图1中气体系统缺失的比热问题，表明温度与系统辐射强度及内部势能的关系，远较与动能关联更为密切。

动能的来源

动能(如粒子振动的动能)的来源引发了一个深层且常被忽视的问题：粒子为何以及如何开始振动？迄今，针对这一根本问题的直接研究尚少。然而，一项关于克鲁克斯辐射计工作原理的研究对此进行了探讨^[16]。该研究指出，微观粒子动能源自一种称为[跃迁冲击](#)的过程，这是电子轨道跃迁所导致的。

相邻的原子或分子之间通常产生库仑引力，使其靠近，但当它们过于接近时，价电子间的排斥力会急剧增强。在一个叫范德华间距的特征距离，这两种相反的力达到平衡。在电子跃迁过程中，这种平衡往往被打破。当电子吸收能量激发后，通常在数纳秒甚至更短时间内跃迁至更高轨道^[17–18]。如图2所示，随着电子云膨胀，原子体积增大，导致与相邻原子的间距缩小。这种

间距的骤减扰乱了粒子之间的平衡，通常引发排斥力骤增，使原子相互排斥。这一由电子跃迁引发的冲击现象被称为**跃迁冲击**(transimpact), 来源于两个英文单词(transition impact)。

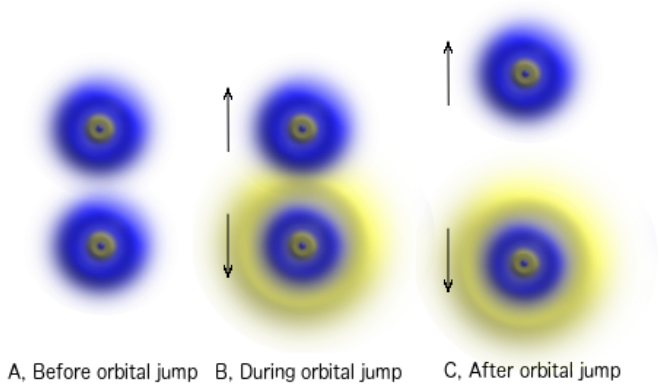


图2: 电子跃迁引发的跃迁冲击现象。

跃迁冲击是爆发性的，类似于爆米花的瞬间爆裂。由此产生的动量将大量动能传递给邻近粒子，推动它们分离并引起振动。电子跃迁是微观层面普遍且经常发生的过程，因此跃迁冲击是广泛存在的相互作用，在很多物理工程中，尤其在热力学中，非常重要。跃迁冲击机制也提供了相变^[22]、布朗运动^[19–21]以及克鲁克斯辐射计运作^[23–27]等多种现象的原动力。由此可见，微观粒子的动能最终源自辐射能，反映了系统势能的水平。

跃迁冲击过程使系统内部动能不断积累，但这种积累不可能无限持续，必须通过某种相反机制将动能转化为其他形式的能量——这一机制被称为**冲击跃迁**^[16]。在该过程中，粒子(如分子、原子或亚原子粒子)的运动或振动与相邻粒子发生碰撞。这种相互作用可能将电子激发至更高轨道，甚至将其逸出，从而改变粒子的势能状态。此外，冲击跃迁中电子的加速运动会导致其辐射电磁波，因而释放能量。通过冲击跃迁，动能被转化为势能与辐射能。

动能向辐射能的转化在诸多日常现象中都有体现。例如，摩擦生热便是冲击跃迁作用的表现：双手互相摩擦时产生的热感，实质上源于皮肤表面分子撞击的动能转化为辐射能。类似地，气筒打气时，底部分子撞击加剧发热，也可归因于冲击跃迁效应。在静电现象中，用塑料棒摩擦毛皮导致表面分子撞击，使电子从原子中逸出，形成电荷积累，这同样是冲击跃迁的具体表现。

动态能的定义

热能传统上被定义为物质中粒子总动能的体现，包括其平动、转动与振动等形式的运动。温度则通常被视为热能的度量，进一步被理解为系统中粒子平均动能的标志。然而，如上所述，这一传统定义可能存在不完整甚至根本性的偏差，忽略了势能与辐射能在热能中的重要作用。

动能、势能与辐射能并非彼此孤立，而是通过跃迁冲击和冲击跃迁，持续相互转化。我们将“**动态能**”定义为这三种互相关联能量形式的总和：

$$(9) \quad T = R + U + K$$

其中, T代表系统的动态能, 包含辐射能(R)、势能(U)和动能(K)。之所以称为“**动态**”, 是因为这三者在系统中不断相互转换, 推动系统演变。将它们归为动态能, 强调了它们的相互转化和波动特性。这种能量的动态平衡是包括热膨胀在内的多种物理和化学过程的基础。虽然三者均影响温度, 但温度主要由辐射能与势能决定; 动能则通过它们间接影响温度。

热膨胀的机理

由于温度反映系统的动态能, 温度升高即意味着动态能的增加。在动态能的三种形式中——动能、势能与辐射能, 势能和动能均可能对物质体积产生影响。如前所述, 动能对体积的作用应为单调性增长, 仅表现为膨胀, 因而无法解释热收缩现象。相比之下, 由势能变化引发的结构重组提供了更合理的解释, 因为其既可导致膨胀, 也可引起收缩。在高能态下, 原子或分子键间距的延展可解释常见的热膨胀; 而在特定条件下, 某些键可排列为更紧凑的结构, 从而产生热收缩。

在这一理论框架下, 热膨胀率可根据图1所示的温度与分子键数量之间的相关性进行估算。方程(4)给出了动理论推导的摩尔比热, 代表用于增加粒子动能的能量部分。鉴于每个化学键都能储存一部分能量, 且比热与键数之间呈高度相关, 因此可粗略假设各类键具有相似的能量储存能力。基于此假设, 可建立一个摩尔比热的经验公式:

$$(10) \quad C_m = \frac{3}{2}R + cB$$

其中, B表示气体分子中的键数, c为每个键的平均能量储存能力。根据图1所示的实验数据, 每个键约可储存6.56J/mol·K的能量。公式中的第一项对应于气体系统中动能的贡献。然而在液体和固体中, 动能的占比通常较小, 其影响可被视为已包含于分子间键所储存的能量中, 从而等效地增加总键数B。因此, 对于液体和固体, 公式(10)可进一步简化如下:

$$(11) \quad C_m = cB$$

依据比热的定义, 该式可改写为:

$$(12) \quad \frac{\Delta E}{\Delta T} = C_m = cB$$

需要指出的是, 此处的比热指每摩尔分子的比热。每一条化学键的延展既促进线性膨胀, 也推动体积膨胀。因此, 该公式表明, 热膨胀与分子中键的数量成正比, 其比例由某一系数决定。该膨胀可视为单位能量在环境压强P下对面积A和长度增量 ΔL 所做的功, 其表达式为:

$$(13) \quad \Delta E = PA\Delta L$$

上述所有因素均可包含在线性热膨胀系数 α 和体积热膨胀系数 β 中。根据方程(12)与(13), 膨胀系数可表述为:

(14) $\alpha_L = \frac{1}{L} \frac{\Delta L}{\Delta T} = \frac{lB}{P}$

(15) $\alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{vB}{P}$

名称	分子式	化学键数	摄氏20度线性热膨胀系 (x10 ⁻⁶ K ⁻¹)	摄氏20度体积热膨胀系 (x10 ⁻⁶ K ⁻¹)
水	H ₂ O	2	69	207
丙烯	C ₃ H ₆	9	150	450
汽油	C ₈ H ₁₈	25	317	950

表 1: 不同分子键数对应的热膨胀系数比较。热膨胀系数随分子键数增加而增大，符合公式(14)和(15)的预测。表中液体的热膨胀系数测量条件为摄氏20度和1个大气压。

这些公式基于简化假设推导，可能无法直接应用于实际情况，但有效揭示了温度与粒子(原子或分子)间键距膨胀的关系，阐明了材料热胀冷缩基本机制。线性膨胀系数l和体积膨胀系数v取决于物质的分子结构，尤其是键的性质。公式表明，膨胀与环境压力P成反比，符合物理常识。值得注意的是，分子键数B越多，热膨胀系数越大。表1中线性 and 体积膨胀系数实际数据支持这种相关性预测。

热收缩的原因

由于分子键结构决定了粒子间的间距，物质在键结构保持不变的情况下通常表现出均匀的热胀冷缩。然而，某些材料中键结构的变化会导致热胀冷缩行为显著变化，甚至出现热收缩。典型例子是水在约摄氏4 度附近发生的热收缩现象，主要源于氢键结构的重组，体现了键结构对热学性质的直接影响。

水分子由一个氧原子与两个氢原子通过共价键连接。由于氧核含有较多质子且电负性强，氧原子对共享电子的吸引力更大，导致电荷分布不均，氧呈现负极性，氢呈现正极性。这种极性促使一个水分子的氧原子吸引邻近水分子的氢原子，形成强度较弱的氢键。

在水和冰中，分子间的吸引力主要由氢键提供的。低温时，氢键缩短引力增强。约在摄氏4 度时，氢键如支架般固定水分子相对位置，形成雪花晶体般的较稀疏结构。随着温度降低，该晶体结构更为明显，导致体积膨胀。虽然键长变化导致的常规热膨胀冷缩效应依旧存在，但在氢键重组引起的结构变化主导了冰的体积膨胀。体现了分子键结构对热学性质的主导作用。

当温度升高时，氢键拉长，引力减弱，最终被跃迁冲击破坏较稀疏的固定结构而坍缩，分子排列更加紧密。因此，在约摄氏4 度以上时，键长变化导致的常规热膨胀冷缩效应回归主导，表现为水的正常热膨胀。

此外，粒子间的吸引力既包括原子或分子间的键力，也包括电子与核间的吸引。因此，单原子分子构成的物质亦呈现出热膨胀冷缩效应，且通常各向均匀的。相比之下，结构复杂的晶体更容易表现出非均匀的热胀冷缩。

结论

热胀冷缩本质上源于物质内部粒子间键结构变化。随着能量的吸收，分子键可通过延展来储存额外的能量。这种键距变化可表现为分子间距的增大、分子内部原子之间的键长延伸，或电子轨道半径的扩大，导致体积膨胀。动态能主要以势能形式储存在这些键结构中，并与温度变化高度相关，是导致物体热胀冷缩的本质。除了键长变化导致的常规热膨胀冷缩外，有时分子键结构主导体积变化，在某些材料中，特定的分子键结构可形成更低密度的分子排列，从而在加热过程中引起收缩。

版本更新

- [11/18/2023: 本文在斯坦福初始发布](#)
- [11/01/2025: 在Zenodo上发表](#)
- [12/18/2025: 增加相关文章摘要连接](#)

相关文章摘要链接

- <https://cs.stanford.edu/people/zjl/abstractc.html>, [PDF](#)
- <https://sites.google.com/view/zjlc/>, [PDF](#)
- <https://xenon.stanford.edu/~zjl/abstractc.html>, [PDF](#)
- <https://doi.org/10.5281/zenodo.17972005>, [PDF](#)

相关文献

- [热力学中的错误概念 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [克鲁克斯辐射计旋转的驱动机制 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [布朗运动的原动力 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [温度是分子平均动能的标志吗? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [绝对零度的本质 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [能量转换三角 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [热膨胀是由于粒子振动引起的吗? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [超流体不是流体 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [为什么相变温度保持恒定 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [摩擦为何会产生热量? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [简明熵概念 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [熵可以减少 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)

- [回归原理 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [金属中是否存在自由电子海? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [电子通道: 导体超导统一论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [低温和高温超导统一理论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [LK-99的局限和意义 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [地球磁场超导起源说 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [关于质量的本质问题 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [从万有引力定律到广义相对论的演化 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [爱因斯坦质能方程的最简单推导 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [如何理解相对论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [数学并非科学 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [潮汐能并非可再生能源 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [AI 知识污染 \(PDF\) \(中文\)](#)
- [DeepSeek pk ChatGPT \(PDF\) \(中文\)](#)

参考文献

1. Tipler, P.A.; Mosca, G. (2008). "[Physics for Scientists and Engineers - Volume 1 Mechanics/Oscillations and Waves/Thermodynamics](#)". New York, NY: Worth Publishers. pp. 666–670. ISBN [978-1-4292-0132-2](#).
2. Bullis, W.M. (1990). "[Chapter 6](#)". In O'Mara, William C.; Herring, Robert B.; Hunt, Lee P. (eds.). *Handbook of Semiconductor Silicon Technology*. Park Ridge, New Jersey: Noyes Publications. p. 431. ISBN [978-0-8155-1237-0](#). Retrieved 2010-07-11.
3. Monroe, J.A.; et al. (2021). "[ALLVAR alloy a thermalization: A novel and cost-effective alternative for small to moderate sized space telescopes](#)". In Hallibert, Pascal; Hull, Tony B.; Kim, Daewook; Keller, Fanny (eds.). *Astronomical Optics: Design, Manufacture, and Test of Space and Ground Systems III*. Vol. 11820. San Diego, United States: SPIE. pp. 52–59. Bibcode:[2021SPIE11820E..0BM](#). doi:[10.1117/12.2594816](#). ISBN [978-1-5106-4478-6](#). S2CID [238477713](#).
4. Liu, J.Z. (2023). "[Can Temperature Represent Average Kinetic Energy?](#)" *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17503871](#)
5. Tuckerman, M.E. (2010). "Statistical Mechanics: Theory and Molecular Simulation". (1st ed.). P. 87. ISBN [978-0-19-852526-4](#).
6. Krönig, A. (1856). "[Grundzüge einer Theorie der Gase](#)". *Annalen der Physik und Chemie* (in German). **99** (10): 315–22. Bibcode:[1856AnP...175..315K](#). doi:[10.1002/andp.18561751008](#). [Facsimile at the Bibliothèque nationale de France \(pp. 315–22\)](#).
7. Clausius, R. (1857). "[Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen](#)". *Annalen der Physik und Chemie* (in German). **176** (3): 353–79. Bibcode:[1857AnP...176..353C](#). doi:[10.1002/andp.18571760302](#). [Facsimile at the Bibliothèque nationale de France \(pp. 353–79\)](#).
8. De Podesta, M.; et al. (2013). "A low-uncertainty measurement of the Boltzmann constant". *Metrologia*, **50** (4): S213-S216, BIPM & IOP Publishing Ltd.

9. Planck, M. (1914). "The Theory of Heat Radiation". *Masius, M. (transl.)* (2nd ed.). P. Blakiston's Son & Co. [OL7154661M](#).
10. Planck, M. (1915). "Eight Lectures on Theoretical Physics". *Wills, A. P. (transl.)*. Dover Publications.
11. Draper, J.W. (1847). "On the production of light by heat". *London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, series 3, **30**: 345–360.
12. Narimanov, E.E.; Smolyaninov, I.I. (2012). "Beyond Stefan–Boltzmann Law: Thermal Hyper-Conductivity". *Conference on Lasers and Electro-Optics* 2012. OSA Technical Digest. Optical Society of America. pp. QM2E.1. doi:[10.1364/QELS.2012.QM2E.1](#).
13. Knizhnik, K. (2016). "[Derivation of the Stefan–Boltzmann Law](#)". *Johns Hopkins University – Department of Physics & Astronomy*.
14. Flanagan, É.É.; Hughes, S. A. (2005). "[The Basics of Gravitational Wave Theory](#)". *New Journal of Physics*. **7** (1): 204. arXiv:[gr-qc/0501041](#). Bibcode:[2005NJPh....7..204F](#). doi:[10.1088/1367-2630/7/1/204](#). ISSN [1367-2630](#).
15. Maxwell, J.C. (1875). "The Question of the Atom". *J. Chem. Soc. (London)*, Facsimile published in Mary Jo Nye, **1875** (28): 493-508.
16. Liu, J.Z. (2023). "[The Process Driving Crookes Radiometers](#)". *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17503377](#)
17. Vijay, R.; et al. (2011). "Observation of Quantum Jumps in a Superconducting Artificial Atom". *Physical Review Letters*. **106** (11): 110502. arXiv:[1009.2969](#). doi:[10.1103/PhysRevLett.106.110502](#). PMID [21469850](#).
18. Itano, W.M.; et al. (2015). "[Early Observations of Macroscopic Quantum Jumps in Single Atoms](#)". *International Journal of Mass Spectrometry*. **377**: 403. doi:[10.1016/j.ijms.2014.07.005](#).
19. Liu, J.Z. (2019). "[The Cause of Brownian Motion](#)". *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17503671](#)
20. Feynman, R. (1964). "[The Brownian Movement](#)". *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I. pp. 41.
21. Einstein, A. (1926). "[Investigations on the Theory of the Brownian Movement](#)". *Dover Publications*.
22. Liu, J.Z. (2023). "[Why Phase Transition Temperature Remains Constant](#)". *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17504663](#).
23. Gibbs, P. (1996). "[How Does a Light-Mill Work?](#)". *Usenet Physics FAQ*. Retrieved 8 August 2014.
24. Crookes, W. (1874). "[On Attraction and Repulsion Resulting from Radiation](#)". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. **164**: 501–527. doi:[10.1098/rstl.1874.0015](#).
25. Brush, S.G.; Everitt, C.W.F. (1969). "[Maxwell, Osborne Reynolds, and the Radiometer](#)". *Historical Studies in the Physical Sciences*, vol. 1, 1969, pp. 105–125.
26. Wolfe, D.; et al. (2016). "[A Horizontal Vane Radiometer: Experiment, Theory, and Simulation](#)". *Journal-ref: Phys. Fluids* **28**, 037103. Department of Physics, Naval Postgraduate School, Monterey, CA 93940, USA. **28** – via arXiv.
27. Yarris, L. (2010). "[Nano-sized Light Mill Drives Micro-sized Disk](#)". *Physorg*. Retrieved 6.