

爱因斯坦质能方程的最简单推导

刘正荣

ZJL@CS.Stanford.EDU

此内容由人工智能(AI)辅助翻译, 若未达意, 请查阅[原文](#)

前言

质能等价原理是物理学中最深刻的认知之一, 它揭示了物质本质上只是能量的一种形式。尽管这一原理的发现已有百余年, 但对普通大众而言, 它依然显得陌生而遥远。这种认知上的脱节, 可能源于缺乏清晰、系统、通俗的科普材料, 使得这一深奥的概念难以在学术圈之外广泛传播。通过简明易懂地推导质能方程, 将有助于弥合这一鸿沟, 使大众能够更好地理解并接受这一伟大的物理原理。

质能方程 $E = mc^2$ 的推导

麦克斯韦的电磁方程组表明, 光以恒定速度传播, 其传播速度约为 3×10^8 米/秒, 通常以符号c表示。该结论已通过大量实验与观测得到了充分验证。此外, 电磁波(或光子)的动量p与其能量E成正比:

$$(1) \quad p = \frac{E}{c}$$

或

$$(2) \quad E = pc$$

许多关于上述公式的推导都以爱因斯坦的质能方程为前提, 这容易导致循环论证, 使得推导失去严谨性。事实上, 关于光的动量和光压的存在, 早在质能方程被提出之前就已有理论分析和实验证据加以支持。由于物质由带电粒子构成, 当电磁波(包括可见光)照射到物体表面时, 根据[洛伦兹力定律](#), 光会对这些带电粒子施加作用力。电磁波的能量与动量正是通过这种力传递给物质, 并通过对粒子做功的方式, 使粒子获得能量。这一过程构成了电磁波中能量与动量关系的基本理论基础。[公式\(1\)可以通过简化形式的洛伦兹力定律加以推导](#)。另一方面, 动量p的定义是:

$$(3) \quad p = mv$$

其中, m为物体的质量, v是其速度。对于光子而言, 其传播速度为光速c, 因此根据上述动量定义, 可以将其形式改写为:

$$(4) \quad p = mc$$

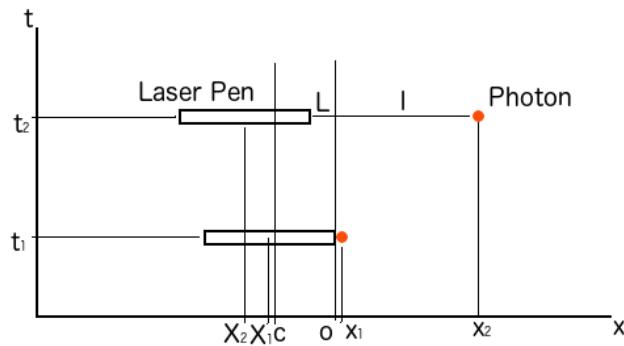
将该动量表达式(公式4)代入公式(2), 即可得到质能方程:

$$(5) \quad E = mc^2$$

需要指出的是，从公式(3)到公式(4)的推导，标志着从经典物理向相对论物理的一个重要跨越。接下来，我们将通过一个思想实验进一步验证公式(4)的合理性与适用性。

光子动量公式 $p=mc$ 的证明

这一推导基于一个与爱因斯坦相似的思想实验。设想一个静止于某惯性系中的激光笔，如下图所示，其中横轴表示水平方向的位置，纵轴表示时间。在时刻 t_1 ，激光笔沿 x 轴向右发射出一个光子。实验表明，光具有压力，因此携带动量，也对应等效质量。根据动量守恒定律，发射过程中激光笔会受到反冲，与光子朝相反方向运动。到时刻 t_2 ，激光笔已向左移动了 L 米，光子则向右移动了 l 米，这两个距离均是相对于它们的初始位置 O 而言。



激光笔与光子组成系统的质心最初位于点 C ，其位置可按如下方式计算：

$$(6) \quad C = \frac{MX_1 + mx_1}{M+m}$$

其中， M 和 m 分别表示激光笔和光子的等效质量， X_1 和 x_1 分别对应它们在时刻 t_1 的质心位置。类似地，在时刻 t_2 ，激光笔与光子组成系统的新的总质心位置可按如下方式计算：

$$(7) \quad C = \frac{MX_2 + mx_2}{M+m} = \frac{M(X_1 + L) + m(x_1 + l)}{M+m} = \frac{MX_1 - ML + mx_1 + ml}{M+m}$$

其中， X_2 和 x_2 分别表示在时刻 t_2 时激光笔和光子的质心位置。可以将激光笔与光子视为一个在无外力作用下的封闭系统，根据质心守恒原理，系统的质心位置必须保持不变。因此，依据公式(6)和(7)计算所得的质心位置应当相等，由此可得以下等量关系：

$$(8) \quad \frac{MX_1 + mx_1}{M+m} = \frac{MX_1 - ML + mx_1 + ml}{M+m}$$

这个等式可以简化为：

$$(9) \quad ML = ml$$

将等式两边同时除以时间间隔 t_2-t_1 , 可得:

$$(10) \quad \frac{ML}{t_2-t_1} = \frac{ml}{t_2-t_1}$$

由于激光笔的速度为 $V=L/(t_2-t_1)$, 光子的速度为 $v=l/(t_2-t_1)$, 方程可进一步简化为:

$$(11) \quad MV = mv$$

这实际上体现了动量守恒原理。需要注意的是, l 是光子在时间间隔 t_2-t_1 内传播的距离, 因此方程(11)中的速度 v 实际上即为光速 c 。由此, 该方程可以改写为:

$$(12) \quad MV = mc$$

方程左边表示激光笔所获得的动量($p_{pointer}$), 这是激光笔与光子相互作用产生的动量。因此, 该动量必须等于光子的动量(p_{photon})。由此, 我们可以建立如下关系:

$$(13) \quad p = p_{photon} = p_{pointer} = MV = mc$$

由此证明了公式(4) $p = mc$, 从而确认定义(3)能够从牛顿力学推广到相对论物理范畴。因此, 前一节中的推导是成立且合理的。

等效质量

细心的读者或许会质疑:光子没有静止质量, 我们还能在质能方程的推导中使用动量公式(4)吗?当提到光子“没有质量”时, 指的是它的静止质量, 通常用 m_0 表示, 即观察者与物体相对静止时的质量。正如前文所述, 公式(4)中的质量指的是等效质量。虽然光子的静止质量为零, 但它仍然具有等效质量。在质量—能量等价的框架下, 等效质量定义为:

$$(14) \quad m = \frac{E}{c^2}$$

为了解决黑体辐射的紫外灾难问题, 普朗克提出电磁波的能量必须满足以下形式, 才能使其理论预测的辐射分布与实测数据相符:

$$(15) \quad E = hf$$

其中, h 表示普朗克常数, f 为波的频率。该观点随后在爱因斯坦对光电效应的解释中得到支持。因此, 根据定义(14), 光子的等效质量应为:

$$(16) \quad m = \frac{hf}{c^2}$$

有些文献将质能方程(5)中的质量称为相对质量,因为该方程最初源自爱因斯坦的相对论推导。然而,相对质量(m_r)的表达式为:

$$(17) \quad m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

其中, v 为物体的运动速度。然而,该定义在一定程度上限制了质能等价原理的适用范围。对于具有非零静止质量($m_0 \neq 0$)的物体,其等效质量 m 可以等同于相对质量 m_r 。对于运动中的物体来说,相对质量大于其静止质量,这反映了动能所带来的质量增加。

而对于光子,其等效质量由表达式(16)给出,代表辐射能量所对应的质量。由于光子的静止质量为零,且以光速 c 传播,若直接套用相对质量公式(17),则会得到一个形式不定的结果0/0。因此,试图用公式(17)将质能等价原理扩展到光子时遇到了困难。为避免误解,物理学界逐渐摒弃了相对质量的概念。

作为物理学中的普适原理,质能等价关系必须适用于所有系统,无论其是否具有静止质量。公式(14)中引入的等效质量概念,提供了一个明确且统一的理论框架,能够自然地扩展至光子等无静止质量的粒子,从而统一了所有物理系统中质量的定义及其与能量之间的关系。

一个系统的等效质量涵盖了所有能量形式的贡献,不仅包括动能、势能和辐射能,还包括物质本身的质量。实际上,正如下文将展示的那样,即使静止质量本身,也是在观察者参考系中相对的量。

物理原理的普适性

电磁波(包括光子)表现出波粒二象性。法国物理学家路易·德布罗意将这一现象推广到物质层面,提出物质同样具有波粒二象性。光子的波长 λ 可由公式(1)和(15)推导得出如下表达式:

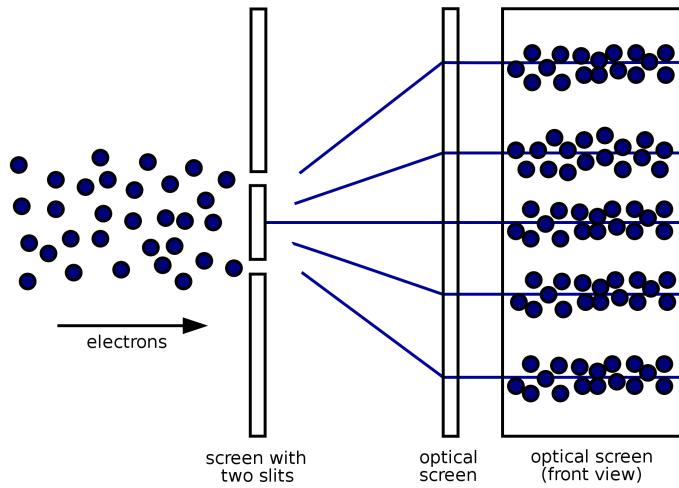
$$(18) \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

受此关系启发,德布罗意提出,物质波的波长可通过将经典物理中的动量定义(公式3)代入上述表达式来获得:

$$(19) \quad \lambda = \frac{h}{mv}$$

为了验证德布罗意的猜想,科学家们对电子进行了双缝实验,结果显示如图所示的波动干涉特征,从而有力支持了德布罗意的假说。

在德布罗意物质波理论基础上,薛定谔提出了描述物质波行为的方程,即薛定谔方程。该方程经实验验证,得到广泛应用,奠定了量子力学的理论基础。



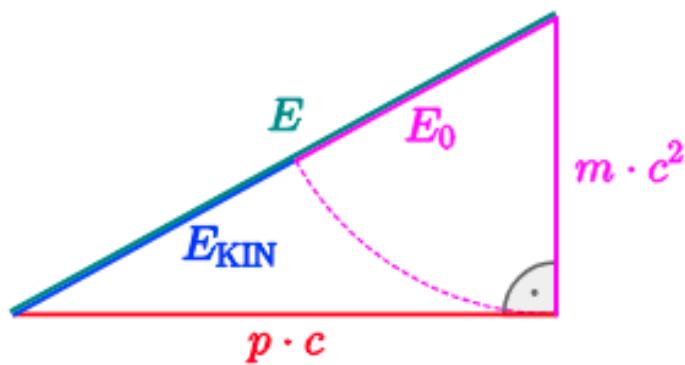
基于同样的普适性原理,我们可以反向推测,光子的动量也能从经典物理中的动量定义(公式3)推广至公式(4)的形式。结合光子的动量表达式(公式1),我们得出了相同的质能方程(公式5)及等效质量定义(公式14)。表面上看,这似乎是相同的结论,实际上所依赖的概念却有所不同。

在此,我仅依靠动量的普适性原理,省略了思想实验的推导过程。这种普适性意味着动量的定义可适用于任何物理系统。下一节将进一步探讨这一普遍性,特别是其与质能方程以及能量和动量关系之间的联系。

能量—动量关系

既然要讨论质能方程,就必须进一步理解能量—动量关系。它是质能方程在具有非零动量的多体系统中的推广形式,基于爱因斯坦提出的如下图所示的“三角关系”建立。

$$(20) \quad E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$



该关系与质能方程一致,适用于既有静止质量也无静止质量的系统。对于无静止质量的系统($m_0=0$),该关系与光子的动量公式(公式2)相同;而对于具有非零静止质量的系统($m_0 \neq 0$),动量项(pc)²则与系统的动能相关。对于静止系统($p=0$),该关系简化为经典的质能方程:

$$(21) \quad E = m_0 c^2$$

对于单体系统，将公式(3)中的动量p和公式(17)中的质量m代入公式(20)的动量项和质量项，即可将其简化为质能方程(公式5)。这表明，能量—动量关系比质能方程具有更广泛的适用性，不仅适用于单体系统，也适用于多体系统。

然而，质能方程中的动能与能量—动量关系中的动能存在一个重要区别。质能方程的动能来源于物体相对于观察者的运动；而在能量—动量关系中，动能还包括子系统相对于系统质心的运动。例如，气体分子在容器内的运动：当观察者与系统质心相对静止时，按照质能方程，系统没有动能；但从能量—动量关系(公式20)来看，气体分子的动能体现在 $(pc)^2$ 项中。这些动能构成系统的内能，从而增加了系统的静止质量。

再比如，考虑地球绕太阳的运动。对于处于太阳系外部且与太阳系同步运动的观察者而言，地球的运动被视为太阳系内部的运动，其动能作为内能贡献于整个太阳系的整体静止质量。

然而，对于位于太阳系内部的观察者来说，地球的运动表现为其自身的动能，从而增加了地球的等效质量。由此可见，等效质量与静止质量的概念具有相对性，取决于观察者所处的参考系。

质量与能量的可互换性

上述例子也表明，动能和质量是可以相互转换的。事实上，质能方程与能量—动量关系揭示了一个更深刻的物理原理，即质量与能量之间的可互换性。这种互换不仅适用于动能，也包括势能和辐射能。

例如，在氢聚变过程中，氢原子聚合形成氦原子的同时，会释放出大量来自氢核之间的势能，导致系统总质量减少。也就是说，聚变后产生的氦原子的总质量小于聚变前氢原子的总质量。利用质能方程，根据损失的质量可以准确预测释放的能量，而这一预测已被实验观察所证实。

实际上，化学能同样具有质量。例如，一个充满电的电池，其质量会比放电后的电池略大，只不过这种质量差异极其微小，需要极高精度的测量仪器才能检测出来。

更直接地说，物质所包含的能量可以在特定条件下完全释放。例如，在正电子与电子湮灭的过程中，粒子的全部质量被转化为辐射能。任何基本粒子都可以与其对应的反粒子发生湮灭，释放出其全部质量所对应的能量。

反过来，在成对产生(Pair Production)过程中，高能光子在经过原子核附近时，可以转化为一个电子和一个正电子，即从纯能量中产生出物质。

因此，等效质量不仅包含动能、势能和辐射能，更体现了质能可互换的基本原理。这种可互换性揭示了质量与能量之间一种更为深层的对称性。由于能量是一个守恒的物理量，等效质量也应当是守恒的。关于质量本质的进一步探讨，详见文章《[关于质量的本质问题](#)》。

版本更新

- 06/08/2018: 本文在斯坦福初始发布
- [11/02/2025: 在Zenodo上发表](#)
- [12/18/2025: 增加相关文章摘要连接](#)

相关文章摘要链接

- <https://cs.stanford.edu/people/zjl/abstractc.html>, [PDF](#)
- <https://sites.google.com/view/zjlc/>, [PDF](#)
- <https://xenon.stanford.edu/~zjl/abstractc.html>, [PDF](#)
- <https://doi.org/10.5281/zenodo.17972005>, [PDF](#)

相关文献

- [热力学中的错误概念 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [克鲁克斯辐射计旋转的驱动机制 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [布朗运动的原动力 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [温度是分子平均动能的标志吗? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [绝对零度的本质 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [能量转换三角 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [热膨胀是由于粒子振动引起的吗? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [超流体不是流体 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [为什么相变温度保持恒定 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [摩擦为何会产生热量? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [简明熵概念 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [熵可以减少 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [回归原理 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [金属中是否存在自由电子海? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [电子通道: 导体超导统一论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [低温和高温超导统一理论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [LK-99的局限和意义 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [地球磁场超导起源说 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [关于质量的本质问题 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [从万有引力定律到广义相对论的演化 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [爱因斯坦质能方程的最简单推导 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [如何理解相对论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [数学并非科学 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [潮汐能并非可再生能源 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [AI 知识污染 \(PDF\) \(中文\)](#)
- [DeepSeek pk ChatGPT \(PDF\) \(中文\)](#)