

布朗运动的原动力

刘正荣

ZJL@CS.Stanford.EDU

此内容由人工智能(AI)辅助翻译, 若未达意, 请查阅[原文](#)

摘要

理解微观尺度物理现象具有重要意义。在过去的200年里人们持续观察并研究微观粒子的布朗运动。阿尔伯特·爱因斯坦对这些粒子的行为进行了统计建模。但, 驱动布朗运动的机制一直是未解之谜。此前有观点认为, 布朗运动是由于分子运动撞击微粒所致。然而, 我们的研究表明分子的随机运动无法提供足够的动量驱动布朗运动。我们认为布朗运动是由**跃迁冲击(Transimpact)**驱动的。这是一种原子之间的相互作用, 是电子跃迁的副作用。吸收能量的电子被激发到更高的轨道, 导致原子体积膨胀, 并使其与相邻粒子的距离减小, 打破原子之间吸引力与排斥力的平衡。这一过程会在粒子之间产生排斥力, 将粒子推开。跃迁冲击作用就象爆米花的突然膨胀推动周围颗粒。这可能正是许多物理现象(比如粒子运动、物质相变、克鲁克斯辐射计的旋转等)的基本驱动机制。此外, 跃迁冲击还促进系统中以及系统之间的能量交换, 从而维持系统的平衡状态。

前言

1827年, 罗伯特·布朗在显微镜下观察水中的唐松草花粉时, 注意到花粉颗粒呈现出不规则的抖动^[1-5]。为了排除生命活动的可能性, 他用煮熟的花粉重复验证, 仍然如此。后来, 这种现象以他的名字命名为布朗运动。此后, 人们发现布朗运动不仅存在于花粉中, 而是一种日常生活中普遍现象。你或许也曾注意到, 在昏暗房间的一束光中, 尘埃颗粒在空中飞舞。实际上, 布朗运动反映了微观尺度上粒子之间的一种基本相互作用。

1905年, 当时原子和分子的存在尚未被充分证实, 阿尔伯特·爱因斯坦就对布朗运动中粒子的运动进行了统计建模^[6-8]。人们因此认为这是分子存在的间接证明, 推测是流体中分子的随机运动推动了布朗运动中的粒子, 但至今其背后的物理机制仍未完全了解。随机运动的水分子真的具有足够的动量推动布朗运动中花粉颗粒吗? 本文将首先回答这个问题。如果不能, 那么究竟是什么机制在推动它们? 这个机制可能是推动热力学过程以及许多其它物理现象的底层动力。

分子运动的动量不足以驱动布朗运动的花粉颗粒

为了估算驱动布朗运动所需的水分子速度, 我们假设一个静止的花粉颗粒被一个以速度 v 运动的水分子撞击。为了最大化估算该分子传递的动量, 我们假设该水分子在碰撞后以相同速度反向弹回, 且其动量完全传递给花粉。单个水分子的质量约为 2.99×10^{-26} 千克。碰撞前后水分子动量的变化为 $v \times 2 \times 2.99 \times 10^{-26}$ 千克·米/秒, 或,

$$(1) \quad p = v \times 5.98 \times 10^{-26} \text{ 千克} \cdot \text{米/秒}$$

唐松草花粉颗粒直径通常在 $50 - 100 \times 10^{-6}$ 米之间。为保守估计, 这里采用较小的直径 40×10^{-6} 米, 对应的体积约为 6.4×10^{-14} 立方米。由于花粉悬浮在水中, 其密度可以合理地认为接近水的密度, 室温下约为1,000千克/立方米。撞击后, 假设花粉获得

的速度为 300×10^{-9} 米/秒。这一速度应该是显微镜下肉眼所能辨别的底限，因为在一秒内移动的距离已经小于可见光的波长范围： $380 - 750 \times 10^{-9}$ 米。换句话说，布朗当年观察到的花粉实际运动速度应该高于这个值。一次碰撞后，花粉将获得约为 1.92×10^{-18} 千克·米/秒的动量。这一动量应当对应于与之碰撞水分子的动量变化：

$$(2) \quad v \times 5.98 \times 10^{-26} = 1.92 \times 10^{-18}$$

因此，要推动花粉达到可观测速度下限 300×10^{-9} m/s，水分子的速度必须大于

$$(3) \quad v = 3.21 \times 10^7 \text{ m/s}$$

这个速度已经超过了光速的10%。根据动能分布推算，在室温下水分子的平均速度约为590米/秒^[9]。这一数值与水中的音速（~1,500 米/秒）^[10]大致相符。这一速度可视为水分子平均速度的上限，因为声波的传播依赖于分子之间的相互作用传递的。然而，空气分子的平均速度也不到1,200 米/秒。鉴于水的黏度远高于空气，水分子的运动受到的限制也更大，只会低于空气分子速度。也就是说，布朗运动所需的水分子速度比实际分子平均速度高出四个数量级。而且，这个速度还是极其保守条件下估算的。因此，试图通过单个分子的直接碰撞来解释布朗运动，其要求远远超出了物理上水分子平均速度可实现的范围。

此外，我们来估算一下单个水分子的速度超过 3.21×10^7 米/秒的概率。假设水分子的速度服从高斯分布，其平均速度为1,500 米/秒。根据前面的讨论，这一数值可以视为其随机运动速度的均值上限，实际均值应该更接近590米/秒。为了尽可能提高估算的概率，我们采用了一个极为宽松的假设：标准差也为1,500米/秒，与均值相等。这个假设比真实情况下水分子的Maxwell - Boltzmann分布的实际离散程度要宽上数百倍。在这一假设下，对应于速度 3.21×10^7 米/秒的z值为：

$$(4) \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{3.21 \times 10^7 - 1,500}{1,500} = 21,399$$

因此，基于高斯分布，水分子速度超过 3.21×10^7 米/秒的概率可以按如下方式估算：

$$(5) \quad P(v > 3.21 \times 10^7) = P(z > 21,339) \approx \frac{1}{z\sqrt{\pi/2}} e^{-z^2/2} < 10^{-98,000,000}$$

这个概率几乎为零。即使我们假设花粉每宙秒(yoctosecond, 10^{-24} 秒)受到周围水分子的撞击一次，单个分子出现如此极端速度所需的平均时间也将远远超过宇宙的年龄。因此，水分子撞击造成的布朗运动是极其罕见的，有生之年也等不到。

尽管如此，有人可能会认为，多个水分子同时撞击的共同作用可能会产生足够的动量推动花粉。考虑到水分子的平均速度约为590 米/秒，要将一个唐松草花粉颗粒加速到最低可检测速度 300×10^{-9} 米/秒，至少需要**54,418**个水分子同时、并且朝同一方向撞击。这个分子数(N)可以通过如下动量守恒公式估算：

$$(6) \quad N \times 590 \times 5.98 \times 10^{-26} = 1.92 \times 10^{-18}$$

鉴于分子运动本质上是随机的，水分子会从各个方向撞击花粉，使得它们的作用大多相互抵消。若要使花粉颗粒产生一个净位移，全部54,418个水分子必须在同一时刻撞击花粉的同一侧，且另一侧完全没有撞击。然而，在三维空间中，每个随机分子都可以朝无限多可能的方向运动，这种方向一致、高度协同行为的可能性极小，应该与第五式中所估算的概率不相上下。即便在一个高度简化的假设下：即每个分子只有两个可能状态(撞击或不撞击)，这种同步行为的概率也已经微乎其微：

$$(7) \quad P = 2^{-54,418}$$

实际意义上，这种自发产生如此高度协调且非对称协同撞击的可能性，几乎可以忽略不计。因此，将布朗运动归因于随机分子碰撞的集体效应这一假设，缺乏足够的支持。如果分子的运动无法提供驱动布朗运动所需的动量，那么，究竟是什么机制在背后起作用呢？

驱动布朗运动的机制—跃迁冲击

跃迁冲击(Transimpact)一词源自“transition impact”，指的是由电子跃迁的副作用所引发的原子间相互作用^[11]。通常，彼此邻近的原子或分子之间会产生吸引力；当它们之间的距离变得过小时，价电子之间的排斥力会迅速增强。在某一临界距离下，吸引力与排斥力之间会达到平衡。然而，这种平衡常常会被电子的跃迁所打破。当电子吸收能量(如电磁波)时，会在数纳秒内跃迁到更高的能级轨道^[12-13]。这会导致电子云扩张，使原子的体积增大，并缩短与相邻原子之间的距离。原子之间空间的突然压缩会打破既有的平衡，并显著增强原子间的排斥力。这一过程以爆发性速度推开邻近粒子。

如图1A所示，两个彼此邻近的单原子分子，其吸引力与排斥力达到平衡。当其中一个分子吸收能量后，其内部的电子发生轨道跃迁，如图1B所示，分子的体积随之增大，两者之间的间距被压缩。这增强了分子间的排斥力，将它们彼此推开，朝着相反方向运动，如图1C所示^[11,14]。

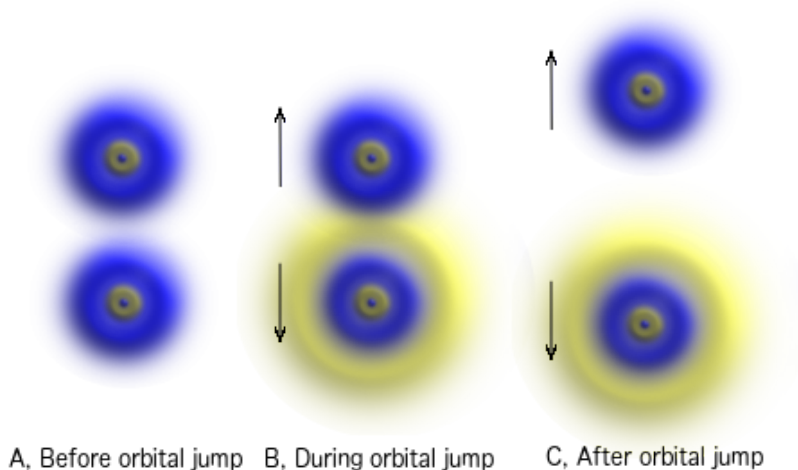


图1: 跃迁冲击(Transimpact)过程示意图

为了说明这种相互作用，我们以氧原子的电子轨道跃迁为例。原子的半径主要由其价电子轨道决定。氧原子有8个电子，其基态电子排布为 $1s^2 2s^2 2p^4$ ，对应的原子半径约为48皮米(pm)。在常见的激发态中，其电子排布变为 $1s^2 2s^2 2p^3 3s^1$ ，此时的原子半径约为118皮米。因此，当氧原子被激发时，其半径会增加一倍以上，体积在几纳秒内膨胀超过1,200%。这一膨胀效应在氢原子中可能更为显著。这一粗略估算表明，水分子在吸收能量后，其结构可能发生显著扩展，产生跃迁冲击。

跃迁冲击效应可以通过爆米花的爆裂过程来形象地理解。想象一下爆米花在爆开瞬间对周围物体产生的冲击，类似的冲击也发生在水分子与花粉颗粒之间。当邻近的花粉和水分子中的电子被激发时，瞬间强大的冲击力将他们彼此推开。我们认为，正是这种跃迁冲击机制驱动了水中花粉颗粒的布朗运动。

由于电子跃迁在微观尺度上是一种普遍存在的过程，跃迁所引发的冲击也是一种常见现象，成为基本的微观运动机制。它不仅是布朗运动的根源之一，也在众多物理过程中发挥着重要作用。受到跃迁冲击影响的粒子或物体可以是原子、分子、花粉颗粒、尘埃粒子，甚至是气体容器的壁面。

当两个分子之间发生跃迁冲击时，它们会相互推开并获得动能，在固体中表现为晶格振动，在流体中则表现为随机运动。从本质上讲，跃迁冲击促使辐射能和势能转化为动能。换句话说，微观粒子的动能来源于辐射能或势能。接下来的部分将探讨几个涉及跃迁冲击的热力学过程。

驱动克鲁克斯辐射计的动力

跃迁冲击为克鲁克斯辐射计的运行提供了可能的物理机制^[14]。该装置由一组悬挂在半真空罩中的叶片组成，在受到光照时会发生旋转。尽管这一现象早在一个多世纪前就已被观察到，其背后的原理却长期没有定论。虽然曾提出多种解释模型，但都未能充分说明所有实验现象，尤其是叶片在受光初期出现最大加速度这一关键特征。

目前，大多数现有理论将叶片的旋转归因于辐射计内部的气流或气压差异。根据这些理论，辐射计内的空气必须先被加热，才能产生足以驱动叶片旋转的压力差或气流，而这一过程通常需要一定时间。此外，为了使叶片开始转动，驱动力必须足够大，能够克服叶片与支轴之间的静摩擦。因此，在驱动力尚未达到阈值前，叶片应保持静止状态。

由于加速度与净驱动力成正比，按理说它应随着空气温度的升高而逐步增强。即使旋转开始，加速度理论上也应从零起始，并随着驱动力的增强而逐渐增加。然而，几乎所有实验观察都未显示出这种**零加速度或缓慢启动**的阶段，相反，叶片通常在受光初期就表现出明显的加速，难以用传统气流或气压理论加以解释。

Time (s)	0	2	5	17	30	43	64	78	100	110	120	128
Speed (Hz, rev/s)	0	7.5	15	22.5	25	22.5	15	7.5	3.75	3	3	0
Acceleration (Hz/s)		3.75	2.5	0.625	0.192	-0.192	-0.357	-0.536	-0.17	-0.075	0	-0.375

表1:手电筒实验中辐射计转速与加速度随光照时间的变化

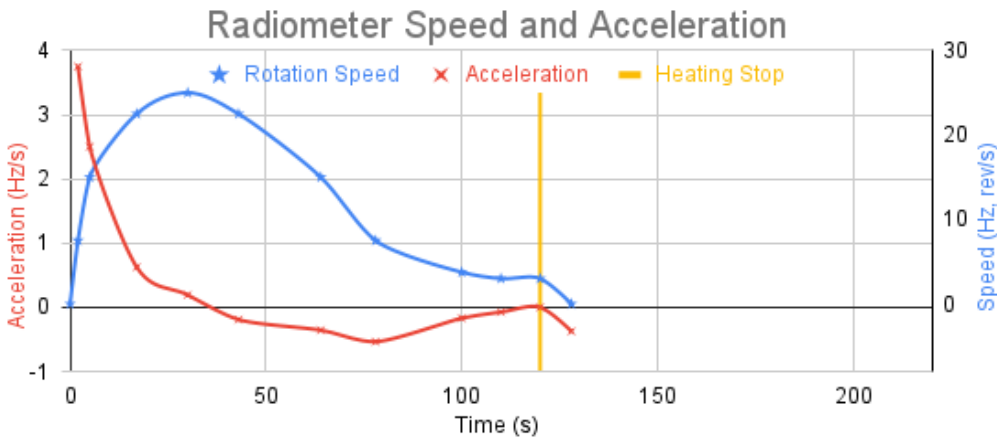


图2:手电筒实验中辐射计转速与加速度的变化曲线

根据跃迁冲击理论，当电子跃迁在叶片表面与空气分子之间引发冲击时，动量会传递给叶片，从而驱动其运动。在光照条件下，叶片的黑色面比白色反光面吸收更多能量，因此其表面发生跃迁冲击的频率更高。这种冲击频率上的不对称性产生了净扭矩，导致叶片旋转。来自光照实验的数据为这一机制提供了有力的支持。

跃迁冲击理论预测，加速度在旋转初期即达到最大值，因为当辐射计受到光照时，原子电子的跃迁立即发生，瞬间产生冲击效应。随着叶片旋转速度的增加，空气阻力也逐渐增强，从而削弱了净驱动力和加速度。因此，旋转速度应在初始阶段迅速上升，直至达到一个峰值，此时驱动力与空气阻力达到平衡，系统进入匀速旋转状态。

这种加速模式在几乎所有实验中都得到了观察验证。为进一步检验该理论预测，研究人员使用强光手电筒进行了实验，并记录了旋转速度的变化情况，结果汇总于表1中。表中每一个加速度数值代表两个相邻转速采样点之间的平均加速度。表1中的实验数据被绘制成图2。实验观察结果与理论预测高度一致，为跃迁冲击理论在解释克鲁克斯辐射计旋转行为方面的有效性提供了有力支持。

温度认知的常期误解

人们普遍认为温度是分子平均动能的标志，然而这一认知实际上存在误区。通过分析跃迁冲击中粒子间的相互作用及能量转换过程，可以对此进行澄清。跃迁冲击在固体中引起粒子的振动，在流体中引发粒子的随机运动，尤其在气体中表现得尤为显著。因此，人们普遍认为粒子运动的动能构成了热能的主要部分，而温度正是这种动能的表现。这一观念还因理想气体经验定律的支持而被进一步强化。在此基础上发展出的气体动力学理论建立了温度与气体分子平均速度之间的如下关系：

(8)
$$v = \sqrt{\frac{3k_b T}{m}}$$

其中，m表示气体分子的质量，T为绝对温度，k_b代表玻尔兹曼常数(1.38×10⁻²³焦耳/开尔文)，而v是气体分子的预测平均速度^[15-21]。因此，在理想气体中，由分子运动所产生的平均动能 K 可根据气体动力学理论推导如下：

(9)
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_b T$$

该公式表明，系统中的动能与绝对温度成正比，从而进一步强化了人们对于“温度代表平均动能”这一观点的误解。如果动能真的是决定系统温度的唯一因素，那么温度与动能的变化关系就可用于计算比热。因此，理想气体的比热可以通过气体动力学理论作如下预测：

(10)
$$C_k = \frac{K}{mT} = \frac{3k_b}{2m}$$

这对应于对定容摩尔比热：

(11)
$$C_v = \frac{3R}{2}$$

其中, R 表示理想气体常数(8.31焦耳/摩尔•开尔文)。对于单原子气体, 该理论的预测结果与实验测量高度一致, 精度可达99%以上。然而, 对于多原子气体, 理论预测的准确性明显下降, 其计算值普遍低于实际测量值。这一预测误差似乎与气体分子中所含的化学键数量大致成正比^[22], 如图3所示。

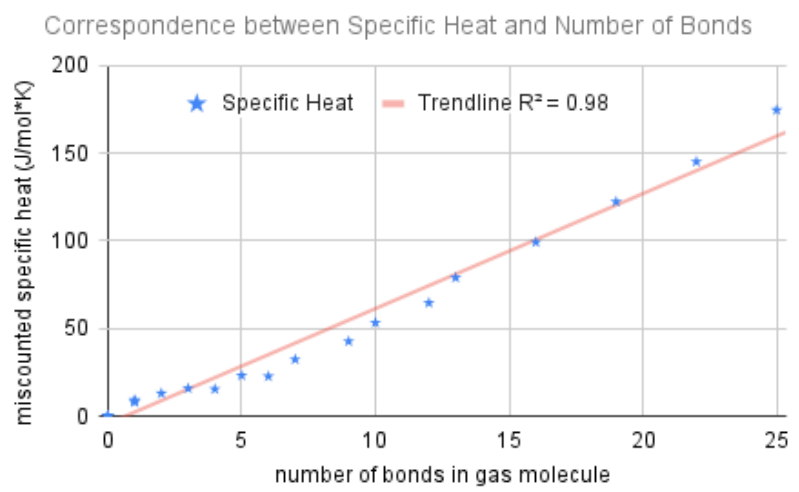


图3: 气体动力学理论中摩尔比热预测误差与分子中键数量之间的关系。摩尔比热的预测误差通过实际测量值减去理论预测值得到。拟合趋势线的斜率约为6.56, 拟合优度 R^2 为0.98。

以辛烷(octane)为例, 其理论预测的比热仅为实测值的7%, 预测误差高达93%。为弥补这种巨大偏差, 前人提出了多种修正方案, 例如将动能在分子的振动、转动和平动三种形式之间进行能量均分(equipartition of energy), 并引入复杂分子的自由度等因素进行调整^[23-30]。然而, 这些修正仍无法合理解释图3中所呈现的比热预测误差随分子键数量变化的趋势。

造成这一差异的根本原因, 在于将动能单一地等同于温度的误解。实际上, 温度所反映的是系统的**热能**, 而热能不仅包括动能, 还包括势能。势能可以储存在粒子间的相互作用中, 例如化学键。化学键类似弹簧, 能够储存能量: 当外部能量(如比热过程中的热输入)作用于分子, 使键长发生变化时, 部分能量便以势能的形式储存在被拉长的化学键中。

同样, 能量也可以储存在被激发到高能轨道的电子中。当电子回到较低能级, 或化学键恢复至较短的平衡长度时, 所储存的能量通常会以电磁波的形式释放, 并可能被其他电子或化学键重新吸收。温度计测量的往往是这些释放出的辐射能, 因此温度与势能的变化密切相关。

这就解释了图3中所呈现的趋势: 比热预测误差与分子中化学键数量的相关性越强, 说明势能在热能中的占比越大, 而气体动力学理论忽略这一部分, 导致预测偏差。

跃迁冲击是动能、势能与辐射能相互转换的纽带。电子轨道跃迁始于对辐射能的吸收, 进而改变粒子的势能, 并通过跃迁冲击影响动能的变化。热能的三种组成部分通过跃迁冲击不断转化, 最终达到动态平衡。系统的势能高低决定了辐射的强弱, 从而影响温度。动能源自辐射能, 同时反映了势能的变化, 这导致动能与温度之间存在一种间接关系。

然而，这种间接关系在某些情况下会失效，例如在恒温相变过程中，温度与动能失去了相关性。因此，温度主要由势能决定。这一点在理解绝对零度的本质时尤为关键，因为即使在绝对零度，动能也并非为零^[31]。

相变的动力

跃迁冲击也可能是真正引发相变的驱动力^[32]。教科书中常见的误解认为，相变是由高温导致分子振动增强所引起的。其实，相变是三种力相互作用的结果：一是外部压力，二是维系分子的分子键，三是试图将分子分开的跃迁冲击。前两者维持分子结构的稳定，而后者则破坏这种结构。这三种力之间的平衡关系决定了物质的物相状态。例如，在固态中，分子能够紧密结合，是因为平均跃迁冲击小于压力与分子键作用力的总和：

$$(12) \quad T < B + P$$

其中，T代表平均跃迁冲击力，B表示分子键结合力，P是外部压力。当这种平衡被打破时，物质便会发生相变。例如：

$$(13) \quad T > B + P$$

跃迁冲击的影响远远超过分子振动的作用，因为分子的动能本质上是由跃迁冲击所赋予的。实际上，在分子振动强度尚未达到破坏分子键的程度之前，分子键可能已经被跃迁冲击打破。跃迁冲击理论也更有效地解释了恒温条件下发生的相变现象。这也涉及另一个教科书中的常见误区：认为相变过程中能量用于打破分子键，因此粒子的平均动能没有净增加，温度也不会升高。该观点的隐含前提是假设温度等同于分子的平均动能。然而，正如前文所述，这一假设并不准确。温度主要反映的是与系统势能相关的辐射能水平。

以冰的融化为例，在固态向液态转变的过程中，分子从氢键的束缚中释放出来，运动自由度增加，动能必然提升。因此，如果温度真正反映的是系统中粒子的平均动能，那么相变过程中温度理应上升。然而，实验表明温度在相变期间保持恒定。造成这一矛盾的根本原因在于：温度并非直接反映动能，而是与势能密切相关。

在相变过程中，温度保持不变，是因为它受限于氢键势能的上限，直到这些键被打破为止。当潜热输入系统时，氢键被拉伸以储存更多势能。随着键的伸长，其强度逐渐减弱，而跃迁冲击的平均强度不断增强，使得这些键变得更加脆弱。最终，当跃迁冲击的强度超过氢键所能承受的极限时，键被破坏，相变随之发生。这表明，氢键的势能上限由其所能承受的最大跃迁冲击强度决定。

如前所述，不同形式的能量交换是通过跃迁冲击实现的，这种交换维持了系统的动态平衡。当某一局部的势能水平较高时，能量会通过跃迁冲击向其他部分传递，直到达到均衡，反之亦然。在相变过程中，由于系统的势能水平受分子键势能上限的限制，整个系统的辐射能水平也因此受到约束。因此，通过辐射能测得的温度保持不变，这正是相变过程中温度恒定的根本原因。

结论

跃迁冲击是许多物理相互作用和现象的根本机制，包括固体中分子的振动、流体中分子的随机运动、小粒子的布朗运动、克鲁克斯辐射计的旋转以及相变等。分子的随机运动本身动量不足以驱动布朗运动，真正推动布朗运动的是跃迁冲击。温度

通常反映的是系统的平均辐射水平，而辐射水平取决于势能而非动能。不同形式的能量通过跃迁冲击相互转换，维持系统的平衡状态，因而形成了温度与动能之间的间接关联，这正是导致温度与动能关系被误解的根源。

版本更新

- [06/16/2019: 本文在斯坦福初始发布](#)
- [11/01/2025: 在Zenodo上发表](#)
- [12/18/2025: 增加相关文章摘要连接](#)

相关文章摘要链接

- <https://cs.stanford.edu/people/zjl/abstractc.html>, [PDF](#)
- <https://sites.google.com/view/zjlc/>, [PDF](#)
- <https://xenon.stanford.edu/~zjl/abstractc.html>, [PDF](#)
- <https://doi.org/10.5281/zenodo.17972005>, [PDF](#)

相关文献

- [热力学中的错误概念 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [克鲁克斯辐射计旋转的驱动机制 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [布朗运动的原动力 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [温度是分子平均动能的标志吗? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [绝对零度的本质 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [能量转换三角 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [热膨胀是由于粒子振动引起的吗? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [超流体不是流体 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [为什么相变温度保持恒定 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [摩擦为何会产生热量? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [简明熵概念 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [熵可以减少 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [回归原理 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [金属中是否存在自由电子海? \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [电子通道: 导体超导统一论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [低温和高温超导统一理论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [LK-99的局限和意义 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [地球磁场超导起源说 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [关于质量的本质问题 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [从万有引力定律到广义相对论的演化 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [爱因斯坦质能方程的最简单推导 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [如何理解相对论 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)

- [数学并非科学 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [潮汐能并非可再生能源 \(PDF: DOI\) \(中文: DOI\)](#)
- [AI 知识污染 \(PDF\) \(中文\)](#)
- [DeepSeek pk ChatGPT \(PDF\) \(中文\)](#)

参考文献

1. Feynman, R. (1964). ["The Brownian Movement"](#). *The Feynman Lectures of Physics*, Volume I. pp. 41-, 1.
2. Li, T.; et al. (2010). ["Measurement of the instantaneous velocity of a Brownian particle"](#). *Science*. **328** (5986): 1673–1675. doi:[10.1126/science.1189403](#). PMID [20488989](#).
3. Weiss, G.H. (1994). "Aspects and applications of the random walk". North Holland.
4. Ben-Avraham, D.; Havlin, S. (2000). "Diffusion and reaction in disordered systems". *Cambridge University Press*.
5. Morozov, A. N.; Skripkin, A. V. (2011). "Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process". *Physics Letters A*. **375** (46): 4113–4115. doi:[10.1016/j.physleta.2011.10.001](#).
6. Einstein, A. (1905). ["Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen"](#) [On the Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat] (PDF). *Annalen der Physik* (in German). **322** (8): 549–560. Bibcode:[1905AnP...322..549E](#). doi:[10.1002/andp.19053220806](#). [Archived](#) (PDF) from the original on 9 October 2022.
7. Einstein, A. (1926). ["Investigations on the Theory of the Brownian Movement"](#). *Dover Publications*.
8. Stachel, J. (1989). ["Einstein's Dissertation on the Determination of Molecular Dimensions"](#). *The Collected Papers of Albert Einstein*, Volume 2. Princeton University Press.
9. Vertical Learning Labs. (2011). ["Molecular Speed Distribution"](#). *Introduction to Chemistry*, Unit 1.5.
10. Nieu Kirk, S. (2022). ["Understanding Ocean Acoustics"](#). NOAA.
11. Liu, J.Z. (2022), ["Misconceptions in Thermodynamics"](#), *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17508534](#).
12. Vijay, R.; et al. (2011). "Observation of Quantum Jumps in a Superconducting Artificial Atom". *Physical Review Letters*. **106** (11): 110502. arXiv:[1009.2969](#). doi:[10.1103/PhysRevLett.106.110502](#). PMID [21469850](#).
13. Itano, W.M.; et al. (2015). ["Early observations of macroscopic quantum jumps in single atoms"](#). *International Journal of Mass Spectrometry*. **377**: 403. doi:[10.1016/j.ijms.2014.07.005](#).
14. Liu, J.Z. (2019), ["The Process Driving Crookes Radiometers"](#), *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17503377](#).
15. [Krönig, A.](#) (1856). ["Grundzüge einer Theorie der Gase"](#). *Annalen der Physik und Chemie* (in German). **99** (10): 315–22. Bibcode:[1856AnP...175..315K](#). doi:[10.1002/andp.18561751008](#). [Facsimile at the Bibliothèque nationale de France \(pp. 315–22\)](#).
16. [Clausius, R.](#) (1857). ["Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen"](#). *Annalen der Physik und Chemie* (in German). **176** (3): 353–79. Bibcode:[1857AnP...176..353C](#). doi:[10.1002/andp.18571760302](#). [Facsimile at the Bibliothèque nationale de France \(pp. 353–79\)](#).
17. Tuckerman, M.E. (2010). "Statistical Mechanics: Theory and Molecular Simulation". (1st ed.). P. 87. [ISBS 978-0-19-852526-4](#).
18. De Podesta, M.; et al. (2013). "A low-uncertainty measurement of the Boltzmann constant". *Metrologia*, **50** (4): S213-S216, BIPM & IOP Publishing Ltd.

19. Maxwell, J.C. (1875). "The Question of the Atom". *J. Chem. Soc. (London)*, Facsimile published in Mary Jo Nye, **1875** (28): 493-508.
20. Reif, F. (1965). "Fundamentals of Statistical and Thermal Physics". *McGraw-Hill*, New York.
21. Carey, V. (1999). "Statistical Thermodynamics and Microscale Thermophysics". Cambridge University Press.
22. Liu, J.Z. (2023). "[Can Temperature Represent Average Kinetic Energy?](#)". *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17503871](#).
23. Boltzmann, L. (1895). "On Certain Questions of the Theory of Gases". *Nature*, **51** (1322): 413-415.
24. Planck M. "On the Law of the Energy Distribution in the Normal Spectrum". *Ann. Phys.*, **4** (553): 1-11.
25. Einstein, A. and Stern, O. (1913). "Some Arguments for the Assumption of Molecular Agitation at Absolute Zero". *Ann. Phys.*, **40** (551) 551-560.
26. Thomson, W. (1904). "Historical and Philosophical Perspectives". *Baltimore Lectures*. Baltimore: Johns Hopkins University Press. Sec. 27.
27. Rayleigh, J.W.S. (1900). "The Law of Partition of Kinetic Energy". *Phil. Mag.*, **49**: 98–118.
28. Pais, A. (1982). "Subtle is the Lord". Oxford University Press. Oxford UK.
29. Armin, H. (1971). "The Genesis of Quantum Theory (1899–1913)". Translated by Claude W. Nash, ed., Cambridge, MA.
30. Mayhew, K.W. (2017). "A New Perspective for Kinetic Theory and Heat Capacity". *Prog. in Phys.*, **13** (3): 165-173.
31. Liu, J.Z. (2023). "[The Nature of Absolute Zero Temperature](#)". *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17504015](#).
32. Liu, J.Z. (2023). "[Why Phase Transition Temperature Remains Constant](#)". *Stanford University*. Archived ([PDF](#)). doi:[10.5281/zenodo.17504663](#).